

Análisis Vectorial

Teoría y problemas

Alexis Molino

Rubén Fiñana

Análisis Vectorial
Teoría y problemas

texto:

Alexis Molino
Rubén Fiñana

Textos Docentes n.º 202

edición:

Editorial Universidad de Almería, 2025

editorial@ual.es

www.ual.es/editorial

Telf/Fax: 950 015459

α

ISBN: 978-84-1351-390-4



Esta obra se edita bajo una licencia Creative Commons
CC BY-NC-ND (Atribución-NoComercial-Compartirigual) 4.0 Internacional



En este libro puede volver al índice
pulsando el pie de la página

A nuestras familias

Contenidos

Prefacio	5
1 Integración en caminos. Teorema de Green	7
1.1 Caminos y trayectorias	7
1.2 Integrales de línea	11
1.2.1 Integrales de línea de campos escalares	11
1.2.2 Caminos equivalentes	12
1.2.3 Integrales de línea sobre campos vectoriales	15
1.2.4 Curvas equivalentes en integrales de línea sobre campos vectoriales	17
1.2.5 Gradiente de un campo escalar. Campos conservativos.	18
1.3 Teorema de Green	25
1.3.1 Consecuencias del Teorema de Green	28
1.4 Ejercicios resueltos	31
1.4.1 Longitud de curva	31
1.4.2 Integral de línea	31
1.4.3 Teorema de Green	35
2 Integración en superficies. Teorema de Stokes	55
2.1 Superficies	55
2.1.1 Plano tangente y vector normal	58
2.1.2 Área de una superficie	60
2.1.3 Integral de superficie de un campo escalar	61
2.1.4 Superficies orientables	62
2.1.5 Integral de superficie de un campo vectorial	63
2.1.6 Independencia de la parametrización	64

2.2	Teorema de Stokes	67
2.3	Ejercicios resueltos	73
2.3.1	Área de superficie	73
2.3.2	Integral de superficie	81
2.3.3	Teorema de Stokes	88
3	Teorema de Gauss	95
3.1	Operador divergencia	95
3.2	Teorema de Gauss	98
3.3	Ejercicios resueltos	103
3.3.1	Comprobar el Teorema de Gauss	103
3.3.2	Integral de superficie. Teorema de Gauss	109

Prefacio.

En el siglo XVII, los matemáticos Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz “descubrieron” el cálculo infinitesimal, ocasionando que las matemáticas cambiaran para siempre. En esa época del Renacimiento se desarrollaba la cultura del momento y consecuentemente la comunidad científica se torna más abierta a compartir ideas y conocimiento. La interacción entre matemáticos condujo al desarrollo de innumerables descubrimientos. Por consiguiente, la combinación del descubrimiento del cálculo infinitesimal y una mayor comunicación, condujeron a un gran número de desarrollos que nunca antes se habían producido.

En este manuscrito, se nombran a tres grandes matemáticos como representantes de los Teoremas de: Green, Stokes y Gauss. Ninguno de estos teoremas fue descubierto y demostrado por un solo hombre, sino por varios a lo largo de muchos años. Lagrange (1736-1813), fue el primero en buscar una prueba del Teorema de la Divergencia o de Gauss, y aunque no pudo demostrarlo, inició un viaje que continuaría Gauss (1777-1855) realizando grandes avances en la física y la matemática. Sin embargo, Ostrogradsky (1801-1861), obtuvo una demostración formal. Por otro lado, el Teorema de Green se convirtió en el próximo gran desafío, Green (1793-1841) propuso el teorema sin demostración y su trabajo habría quedado olvidado sin la ayuda de Thomson (1824-1907). Fue entonces cuando Cauchy (1789-1857) demostró el teorema mientras estaba involucrado con su propia integral de Cauchy.

Finalmente, con el Teorema de Stokes las matemáticas adoptaron un enfoque mucho más polivalente. En un principio, Green propuso por primera vez el teorema y nuevamente Thomson se dio cuenta de su gran poder y lo transmitió a la comunidad científica. Stokes (1819-1903) utilizó el teorema como un problema en uno de sus exámenes y por esa razón el teorema pasó a ser conocido por su nombre.

Varios años después, Hankel (1839-1873) lo demostró germinando la disciplina de las Matemáticas Aplicadas, dando sentido y solución a diferentes problemas de física e ingeniería.

Estos teoremas han tenido una gran influencia en la ciencia con aplicaciones que involucran electricidad, magnetismo, gravedad e incluso el flujo del calor. En la actualidad, se tienen explicaciones y soluciones a problemas que antes solo se imaginaban. Estos matemáticos han formado parte de las mentes más brillantes de la historia y a menudo olvidados, se merecen mucho más respeto del que normalmente se les brinda.

Almería, marzo del 2025.

1. Integración en caminos. Teorema de Green.

1.1 Caminos y trayectorias

Definición 1.1.1 Una trayectoria es una aplicación continua $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$. Siendo $I = [a, b]$ un intervalo de \mathbb{R} .

Definición 1.1.2 Un camino (o arco) es la imagen de la trayectoria, $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^N$, y grafo de la trayectoria es el subconjunto de \mathbb{R}^{N+1}

$$\{(t, \gamma(t)) : t \in [a, b]\}.$$

Se denotará las componentes del camino como:

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

En especial, estamos interesados en caminos en \mathbb{R}^2 ,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

caminos planos y en caminos en \mathbb{R}^3 ,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Obsérvese que cada componente es una función continua de $I \rightarrow \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.1 Demuestra que $(t, \gamma(t))$ es un conjunto cerrado y acotado. ■

■ Ejemplo 1.1

1. $\gamma(t) = (t, t)$, donde $t \in [0, 1]$.

2. El segmento que une los puntos P_0, P_1 : $\gamma(t) = (1-t)P_0 + tP_1, t \in [0, 1]$. En particular, en \mathbb{R}^3 se tiene

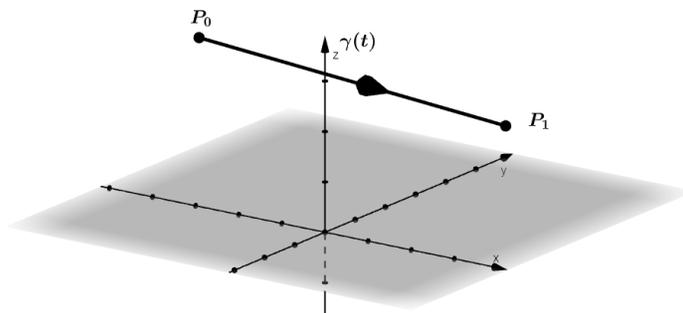


Figura 1.1.1: Segmento que une P_0, P_1

$$\gamma(t) = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1, (1-t)z_0 + tz_1)$$

siendo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

Ejercicio 1.2 Calcule el segmento que une dos puntos P_0, P_1 para $t \in [a, b]$. Es decir, tal que $\gamma(a) = P_0$ y $\gamma(b) = P_1$.

Definición 1.1.3 Diremos a $\gamma(a)$ origen y a $\gamma(b)$ final de la curva. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces la curva es cerrada.

■ **Ejemplo 1.2**

1. La curva $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$.

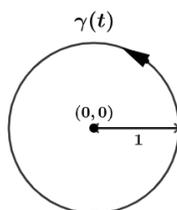


Figura 1.1.2: Curva circunferencia

2. La curva $\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ para $t \in [0, \pi]$.
3. La curva $\gamma(t) = (a + R\cos(t), b + R\sin(t))$ con $R > 0$ y $t \in [0, 2\pi]$.

4. La curva $\gamma(t) = (a \cos(2t), b \sin(2t))$, $a, b > 0$, para $t \in [0, \pi]$.

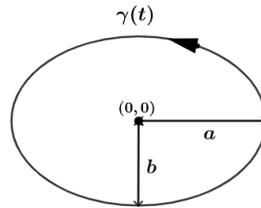


Figura 1.1.3: Curva elipse

Definición 1.1.4 Dada γ una curva, denotaremos por $-\gamma$ a su orientación inversa (o camino inverso). Es decir,

$$-\gamma(t) := \gamma(a + b - t).$$

También se puede denotar al camino inverso como γ^{-1} .

Definición 1.1.5 Diremos que γ es una curva simple si es inyectiva en $[a, b]$.

Definición 1.1.6 Una Curva de Jordan es una curva cerrada y simple.

Teorema 1.1.1 — Teorema clásico de la curva de Jordan. Toda curva de Jordan en \mathbb{R}^2 divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y se le llama exterior de la curva.

Dados dos caminos $\gamma_1(t)$ con $t \in [a, b]$ y $\gamma_2(t)$ con $t \in [b, c]$, tal que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Entonces se puede considerar la unión de los dos caminos:

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 := \begin{cases} \gamma_1, & t \in [a, b], \\ \gamma_2, & t \in [b, c]. \end{cases}$$

Ejercicio 1.3 Calcula el camino de un rectángulo en el plano con vértices: $(0,0)$; $(2,0)$; $(2,1)$ y $(0,1)$.

Ejemplo de camino en \mathbb{R}^3 :

■ **Ejemplo 1.3** $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, k2\pi]$ es la hélice con k vueltas.

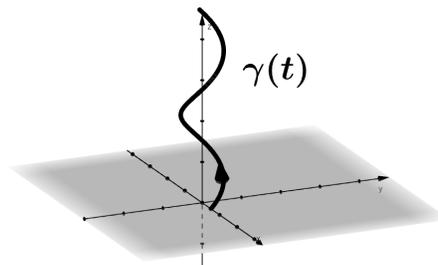


Figura 1.1.4: Camino hélice

Cabe destacar que toda función explícita $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$ es un camino de la forma $\gamma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$. De esta manera, la parábola $y = x^2$ con $x \in [-1, 1]$ es la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [-1, 1]$.

Definición 1.1.7 Diremos que un camino γ es regular (o suave) si es $\mathcal{C}^1(I)$ y además, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. Siendo

$$\gamma'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_N(t)), \quad \forall t \in [a, b].$$

La interpretación geométrica de $\gamma'(t_0)$ para un $t_0 \in [a, b]$, es la del vector tangente a la curva $\gamma(t)$ en el punto $t = t_0$.

Definición 1.1.8 Generalizando la definición anterior, diremos que una curva es regular a trozos si es regular en una partición finita del intervalo I .

En general, los caminos a trozos suelen ser regulares a trozos, véase el Ejercicio 1.3.

De esta manera, si una curva γ es regular, podemos definir su vector tangente unitario en $t = t_0$, como:

$$T(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|},$$

donde $\|\gamma'(t_0)\| = \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + \dots + x'_N(t)^2}$. Por otro lado, $T'(t_0)$ será su vector normal.

Ejercicio 1.4 Demuestra que $T(t_0)$ y $T'(t_0)$ son ortogonales. ■

Si consideramos $\gamma'(t)$ como el vector velocidad. De esta manera, en $N = 2$ para simplificar la notación, se tiene que el módulo de la velocidad (o rapidez) es $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2}$. Por otro lado, es sabido que si $v(t)$ es la rapidez de un móvil para $t \in [a, b]$, entonces el espacio recorrido de dicho móvil es

$$e(t) = \int_a^t v(s) ds.$$

Por tanto, la longitud de una curva γ hasta el instante $t_0 \in (a, b)$ es

$$l(\gamma(t_0)) = \int_{t=a}^{t_0} \|\gamma'(t)\| dt,$$

y la longitud recorrida en su totalidad es

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Ejercicio 1.5 Demuestra que si $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, entonces $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. ■

Veamos a continuación algunos ejemplos del cálculo de longitudes de curvas:

■ **Ejemplo 1.4**

1. $\gamma(t) = (1-t)P_0 + tP_1$, con $t \in [0, 1]$ y $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ dos puntos del plano. En este caso $\gamma'(t) = -P_0 + P_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ y por tanto,

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} dt = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

2. $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$. De esta forma, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ y en consecuencia $\|\gamma'(t)\| = 1$. Por tanto,

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

3. $\gamma(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $R > 0$. De esta forma, $\gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$ y en consecuencia $\|\gamma'(t)\| = R$. Por tanto,

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

4. Cálculo de la longitud de una hélice con "3 vueltas". $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, con $t \in [0, 6\pi]$. De esta forma, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ y en consecuencia $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$. Por tanto,

$$l(\gamma) = \int_0^{6\pi} \sqrt{2} dt = 6\sqrt{2}\pi.$$

5. Longitud de la cicloide $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. De esta forma, $\gamma'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$ y en consecuencia $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$. Por tanto,

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt = 8.$$

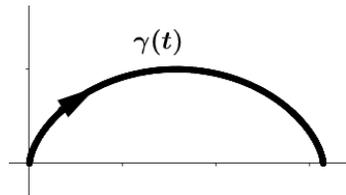


Figura 1.1.5: Curva cicloide

■

1.2 Integrales de línea

A partir de ahora, si no se dice lo contrario, vamos a restringirnos al plano y espacio, es decir, $N = 2, 3$. Empezaremos dando la noción de integrales sobre campos escalares y a continuación sobre campos vectoriales.

1.2.1 Integrales de línea de campos escalares

Este tipo de integrales también se denomina en la literatura "integrales de trayectorias".

Definición 1.2.1 Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, diremos que una aplicación f es un campo escalar sobre A si $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Esto es, para cada $(x, y, z) \in A$ le hace corresponder un valor real (o escalar) $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$.

■ **Ejemplo 1.5** Ejemplos más usuales de campos escalares en la física:

1. La temperatura de una habitación ($N = 3$).
2. La densidad de una plancha metálica no homogénea ($N = 2$).

■

Definición 1.2.2 Dado $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ un camino regular y $f: A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar tal que $\gamma(t) \subset A$ y $f \circ \gamma$ una aplicación continua en $[a, b]$. Entonces se define la integral de línea de f sobre γ como

$$\int_{\gamma} f := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Observación 1.2.1

1. La notación es también válida con diferencial dl . Es decir, $\int_{\gamma} f dl$.
2. Obsérvese que si $f(x, y, z) = 1$, entonces $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} 1 dl = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = l(\gamma)$. Que es coherente con las integrales dobles y triples para el cálculo de áreas y volúmenes.
3. Para el caso particular $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ y $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ ¿cuál sería la interpretación geométrica de $\int_{\gamma} f$?

Ejercicio 1.6 Sea $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, con γ_i continuos. Demuestra que

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

■ Ejemplo 1.6

1. $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$, $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Entonces,

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} 2 dt = 4\pi.$$

2. $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2} dt = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2).$$

3. Si γ es un alambre y $f(x, y)$ es su densidad (kg/m), entonces $\int_{\gamma} f$ es la masa total del alambre.
4. Para el mismo alambre del ejemplo anterior, si $g(x, y)$ es su temperatura, entonces $\frac{\int_{\gamma} g}{l(\gamma)}$ es la temperatura media del alambre. ■

1.2.2 Caminos equivalentes

Veamos el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 1.7** Dado $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\int_{\gamma} f$ tiene el mismo valor para las siguientes curvas:

1. $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$.
2. $\gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, \pi/2]$.
3. $\gamma_3(t) = \gamma_1^{-1}(t)$. Es decir, $\gamma_3(t) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t)) = (-\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$. ■

Definición 1.2.3 Dados $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2]$ dos intervalos reales. Diremos que la aplicación $p : I_1 \rightarrow I_2$ es una parametrización si es biyectiva y $\mathcal{C}^1(I_1)$.

Lema 1.2.2 Toda parametrización envía extremos de I_1 a extremos de I_2 . Es decir, o bien, $p(a_1) = a_2$ y $p(b_1) = b_2$, o bien, $p(a_1) = b_2$ y $p(b_1) = a_2$.

Demostración. Se realizará de dos formas.

Forma 1: Por contrarrecíproco, supongamos que p no conserva extremos. Es decir, o bien, $p(a_1) \in (a_2, b_2)$, o bien, $p(b_1) \in (a_2, b_2)$. Sin perder generalidad, supongamos la primera:

$$c := p(a_1) \in (a_2, b_2).$$

Al ser p inyectiva implica que es monótona, entonces:

- Si p es creciente, se tiene que $p(t) \geq c, \forall t \in [a_1, b_1]$. Es decir, no existe $p^{-1}(t)$ para $t \in [a_2, c)$. Esto es, no es sobreyectiva y contradice que la parametrización es biyectiva.
- Si p es decreciente, se tiene que $p(t) \leq c, \forall t \in [a_1, b_1]$. Es decir, no existe $p^{-1}(t)$ para $t \in (c, b_2]$. Esto es, no es sobreyectiva y contradice que la parametrización es biyectiva.

Por tanto, se concluye que p sí conserva extremos.

Forma 2: Supongamos que $p(a_1) < p(b_1)$ (p creciente) y que p no conserva extremos. Sin perder generalidad suponemos que $p(a_1) \in (a_2, b_2)$. Como p es sobreyectiva, existe $x \in (a_1, b_1)$ tal que $p(x) < p(a_1) < p(b_1)$.

Para p decreciente se argumenta de la misma forma. Aplicamos el Teorema del Valor Intermedio (Teorema 1.2.3) en el intervalo $[x, b_1]$ y se tiene que existe un $c \in (x, b_1)$ (en particular, $c > a_1$) tal que $p(c) = p(a_1)$. Lo cual contradice que p es inyectiva. ■

Teorema 1.2.3 — Teorema del Valor Intermedio. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, para cada $f(a) < y < f(b)$, existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Ejercicio 1.7 ¿En qué momento de la demostración del lema anterior se usa que la parametrización es $\mathcal{C}^1(I_1)$? ■

Definición 1.2.4 Diremos que una parametrización conserva la orientación si $p(a_1) = a_2$ y $p(b_1) = b_2$. En caso contrario, diremos que invierte la orientación.

Observación 1.2.4 Si una parametrización p conserva la orientación, implica que p es creciente. Es decir, $p'(t) \geq 0$ para todo $t \in [a_1, b_1]$. De forma análoga, si invierte la orientación, se tiene que p es decreciente y $p'(t) \leq 0$ para todo $t \in [a_1, b_1]$.

Definición 1.2.5 Sean dos curvas $\gamma_1(t)$ con $t \in [a_1, b_1]$ y $\gamma_2(t)$ con $t \in [a_2, b_2]$. Diremos que que son curvas equivalentes, $\gamma_1 \approx \gamma_2$, si existe una parametrización $p : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ tal que $\gamma_1(t) = \gamma_2(p(t)), t \in [a_1, b_1]$.

Ejercicio 1.8 Demuestra que si $p'(t) \neq 0$, entonces $\gamma_1 \approx \gamma_2$ es una relación de equivalencia. Es decir, es simétrica, reflexiva y transitiva. ■

■ **Ejemplo 1.8** (Curvas equivalentes)

1. $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$ y $\gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, \pi/2]$. En efecto, basta tomar $p : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi/2]$ definido como $p(t) = t/2$. Obsérvese que p es creciente y por tanto, la parametrización conserva la orientación.
2. $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$ y $\gamma_3(t) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t)) = (-\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$. En efecto, basta tomar $p : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$ definido como $p(t) = \pi - t$. Obsérvese que p es decreciente y por tanto, la parametrización invierte la orientación.

Veamos a continuación que las integrales de línea sobre campos escalares no se ven afectadas por parametrizaciones.

Proposición 1.2.5 Sean γ_1 y γ_2 dos curvas regulares y equivalentes, $\gamma_1 \approx \gamma_2$. Considérese f como en la Definición 1.2.2 para $\gamma = \gamma_1$. Entonces,

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Demostración. Sean $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Como $\gamma_1 \approx \gamma_2$, entonces existe una parametrización $p : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ tal que $\gamma_1(t) = \gamma_2(p(t))$, $t \in [a_1, b_1]$. Calculemos la primera integral:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\| dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(p(t))) \|\gamma_2'(p(t)) p'(t)\| dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(p(t))) \|\gamma_2'(p(t))\| |p'(t)| dt. \end{aligned}$$

Distingamos a hora dos casos:

Caso 1: la parametrización conserva la orientación. En este caso $p'(t) \geq 0$ y por tanto, nos quedaría,

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(p(t))) \|\gamma_2'(p(t))\| p'(t) dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s)) \|\gamma_2'(s)\| ds = \int_{\gamma_2} f,$$

habiendo realizado el cambio de variable $s = p(t)$.

Caso 2: la parametrización invierte la orientación. En este caso $p'(t) \leq 0$ y por tanto, nos quedaría,

$$= - \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(p(t))) \|\gamma_2'(p(t))\| p'(t) dt = - \int_{b_2}^{a_2} f(\gamma_2(s)) \|\gamma_2'(s)\| ds = \int_{\gamma_2} f,$$

debido a que $p(a_1) = b_2$ y $p(b_1) = a_2$. ■

Si se considera la parametrización $p : [a, b] \rightarrow [a, b]$ definida como

$$p(t) = a + b - t,$$

invierte la orientación, además, dado $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, se tiene que

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t) = \gamma(p(t)).$$

Por tanto, dado un campo escalar continuo $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\gamma([a, b]) \subset A$, obtenemos por la Proposición 1.2.5 que

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma^{-1}} f.$$

Observación 1.2.6 Aunque la parametrización invierta la orientación, esto no afecta al valor de la integral de línea. Más adelante veremos que esta situación no se da en el caso de integrales en líneas en campos vectoriales.

En el siguiente resultado, se manifiesta que dada una curva podemos reescalarla a otra curva equivalente con otro intervalo arbitrario.

Lema 1.2.7 Sean $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (regular a trozos) y $[c, d] \subset \mathbb{R}$ un intervalo arbitrario. Entonces, existe $\tilde{\gamma}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (regular a trozos) tal que

$$\tilde{\gamma} \approx \gamma.$$

Demostración. Basta definir la parametrización $p: [c, d] \rightarrow [a, b]$ definida como

$$p(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{ad-bc}{d-c},$$

donde $p(c) = a$ y $p(d) = b$.

De esta manera, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(p(t))$ para todo $t \in [c, d]$. ■

Corolario 1.2.8 Sean $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (regular a trozos) y $f: A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, tal que $\gamma([a, b]) \subset A$. Entonces, para todo intervalo $[c, d] \subset \mathbb{R}$ existe $\tilde{\gamma}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (regular a trozos) tal que

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f.$$

1.2.3 Integrales de línea sobre campos vectoriales

Definición 1.2.6 Diremos campo vectorial a toda aplicación $F: A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$, siendo A un conjunto abierto no vacío. Es decir,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = (F_1(x_1, x_2, \dots, x_m), F_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, F_N(x_1, x_2, \dots, x_m)),$$

donde cada $F_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ es un campo escalar: $A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Observación 1.2.9

1. Durante el manuscrito se tomará $N = m = 2, 3$. Y las componentes se escribirán a menudo como

$$F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

2. En general los campos vectoriales se denotan en mayúscula y los campos escalares en minúscula.
3. A veces, para enfatizar que es un campo vectorial se suele denotar como \vec{F} .

■ **Ejemplo 1.9** Algunos ejemplos físicos de campos vectoriales:

1. Campo gravitatorio creado por una masa M centrada en el origen ($N = 3$):

$$\vec{g}(x, y, z) = \frac{-GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z),$$

donde G es la constante de gravitación universal ($6,674 \cdot 10^{-11} Nm^2/Kg^2$). A menudo, se suele escribir de forma radial, es decir

$$\vec{g}(r) = \frac{-GM}{|r|^2} \vec{u}_r,$$

donde $r = (x, y, z)$ y $\vec{u}_r = r/|r|$ es el vector unitario central. Así pues, la fuerza que se ejerce entre dos masas también es un campo vectorial $\vec{F} = m\vec{g}$.

2. Campo electrostático creado por una carga Q centrada en el origen ($N = 3$):

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{KQ}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z),$$

siendo $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ la constante dieléctrica o de Coulomb cuyo valor es aproximadamente $9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$. Al igual que el campo gravitatorio también se suele escribir de forma radial:

$$\vec{E}(r) = \frac{KQ}{|r|^2} \vec{u}_r,$$

y la fuerza eléctrica entre dos cargas es un campo vectorial: $\vec{F} = q\vec{E}$.

3. Velocidad de un fluido que se expande ($N = 2$). ■

Definición 1.2.7 Diremos que un campo vectorial $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$ es continuo si cada componente $F_i : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo.

A continuación definiremos el concepto de integral de línea para campos vectoriales.

Definición 1.2.8 Sea $F : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo y $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tal que $\gamma([a, b]) \subset A$. Entonces, definimos la integral de línea del campo vectorial F sobre la curva γ como:

$$\int_{\gamma} \vec{F} := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Observación 1.2.10

1. De la misma forma, se puede definir la integral de línea de campos vectoriales para el caso de $N = 2$.
2. Si pensamos F como la fuerza a la que está sometido un móvil al recorrer una trayectoria γ , entonces $\int_{\gamma} \vec{F}$ es el trabajo realizado.
3. Para definir la integral de línea de campos vectoriales es suficiente que γ sea regular a trozos.
4. En los libros de física suelen escribir $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ y $\int_{\gamma} \vec{F}$ como

$$\int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

■ **Ejemplo 1.10** Cálculo de integrales de línea sobre campos vectoriales:

1. $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Entonces,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = 2\pi^2.$$

2. $\gamma(t) = (t, t^2, 1)$ con $t \in [0, 1]$ y $F(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$. Entonces,

$$\int_{\gamma} x^2 dx + xy dy + dz = \frac{11}{15}.$$

Ejercicio 1.9 Comprueba los siguientes resultados:

1.

$$\int_{\gamma} \cos(z) dx + e^x dy + e^y dz = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2},$$

siendo $\gamma(t) = (1, t, e^t)$ con $t \in [0, 2]$.

2.

$$\int_{\gamma} \sin(z) dx + \cos(z) dy - \sqrt[3]{xy} dz = -\frac{1}{2},$$

siendo $\gamma(t) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta, \theta)$ con $\theta \in [0, \frac{7\pi}{2}]$.

1.2.4 Curvas equivalentes en integrales de línea sobre campos vectoriales

Proposición 1.2.11 Sean γ_1 y γ_2 dos curvas regulares a trozos y equivalentes ($\gamma_1 \approx \gamma_2$) y F un campo vectorial como en la Definición 1.2.8. Entonces,

- Si tienen la misma orientación

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

- Si tienen la orientación invertida

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = - \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

Observación 1.2.12 Obsérvese que, a diferencia de los campos escalares, el signo de la integral cambia si la parametrización invierte la orientación.

Demostración. La demostración es prácticamente igual que la Proposición 1.2.5 hasta llegar al momento de obtener

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{a_1}^{b_1} F(\gamma_2(p(t))) \cdot \gamma_2'(p(t)) p'(t) dt.$$

Realizando el cambio de variable $s = p(t)$ se obtiene el resultado directo en caso de conservarse la orientación. En el caso de invertirse las orientaciones, es decir, $p(a_1) = b_2$ y $p(b_1) = a_2$, obtendríamos

$$\int_{b_2}^{a_2} F(\gamma_2(s)) \cdot \gamma_2'(s) ds = - \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

1.2.5 Gradiente de un campo escalar. Campos conservativos.

Definición 1.2.9 Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar $\mathcal{C}^1(A)$, definimos como el operador gradiente de f

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_N} \right), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_N) \in A.$$

Observación 1.2.13

1. Obsérvese que el operador gradiente es un campo vectorial:

$$\nabla f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

2. A menudo se suele escribir $\vec{\nabla} f$ para recalcar que es un campo vectorial.

■ Ejemplo 1.11

1. Dado $f(x, y) = x \cos(y)$, entonces $\nabla f(x, y) = (\cos(y), -x \sin(y))$.
2. Dado $g(x, y, z) = x^2 y z^3$, entonces $\nabla g(x, y, z) = (2xy z^3, x^2 z^3, 3x^2 y z^2)$.

Dado f un campo escalar \mathcal{C}^1 . Denotemos como F a ∇f (ya que es un campo vectorial). Entonces se tiene lo siguiente:

$$\int_{\gamma} F = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)' dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)' dt$$

(véase el Ejercicio 1.10)

$$= \int_a^b (f(\gamma(t)))' dt = |f(\gamma(t))|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad (1.1)$$

Ejercicio 1.10 Demuestra que $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)' = (f(\gamma(t)))'$. ■

■ **Ejemplo 1.12** Dado $\gamma = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Sea $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$. Entonces, $\nabla f(x, y, z) = (x, y, z)$. Así pues, si llamamos al campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$, se tiene que

$$\int_{\gamma} F = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1, 0, 2\pi) - f(1, 0, 0) = 1/2 + 4\pi^2/2 - 1/2 = 2\pi^2.$$

Compárese este resultado con el resultado 1 de Ejemplo 1.10. ■

De esta manera, de forma natural nos llega la siguiente definición.

Definición 1.2.10 Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, diremos que un campo vectorial continuo $F : A \rightarrow \mathbb{R}^N$ es conservativo, si y solo si, existe un campo escalar con derivadas parciales continuas $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$ ($\vec{F} = \vec{\nabla} f$). Por otro lado, diremos que la función f es un potencial del campo vectorial F .

Observación 1.2.14

1. Si f es el potencial, también lo será $f + \text{constante}$. Por tanto, el potencial no es único.
2. Si F es conservativo y f su potencial, entonces $\int_{\gamma} F = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. Esto es, la integral NO depende de la trayectoria γ , sino de los puntos inicial $\gamma(a)$ y final $\gamma(b)$ de la curva.
3. Si F es conservativo y γ cerrada ($\gamma(a) = \gamma(b)$) entonces $\int_{\gamma} F = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$.

■ **Ejemplo 1.13** Sea el campo vectorial $F(x, y) = (2x, y)$ y $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, \pi/2]$. Calculamos primero $\int_{\gamma} F$ por definición:

$$\int_0^{\pi/2} (2 \cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = - \int_0^{\pi/2} \sin(t) \cos(t) dt = \frac{1}{2} \cos^2(t) \Big|_0^{\pi/2} = -1/2.$$

Por otro lado, obsérvese que F es un campo conservativo, ya que dado el campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2/2$, se tiene que $\nabla f = F$. Así pues,

$$\int_{\gamma} F = f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0)) = f(0, 1) - f(1, 0) = 1/2 - 1 = -1/2.$$

■

Ejercicio 1.11 Demuestra que tanto el campo gravitatorio como el campo eléctrico son conservativos. Para ello calcula su potencial (gravitatorio y eléctrico). ■

Ejercicio 1.12 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido como

$$F(x, y, z) = (3x^2 + 3y^2z \sin(xz), ay \cos(xz) + bz, 3xy^2 \sin(xz) + 5y).$$

1. Calcula los valores de a y b para que el campo \vec{F} sea conservativo y calcula su potencial. (Sol. $a = -6, b = 5; f(x, y, z) = x^3 - 3y^2 \cos(xz) + 5zy$).
2. Para los valores de a y b obtenidos, calcula $\int_{\gamma} \vec{F}$ siendo $\gamma(t) = (1 - 2t, 1, \pi t)$ con $t \in [0, 1]$. (Sol. $4 + 5\pi$).

■

Ejercicio 1.13 Sea $a > 0$. Se considera el campo vectorial $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido como

$$F(x, y) = \left(2x + \frac{a}{x + y^2}, \frac{2y}{x + y^2} \right),$$

siendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 > 0\}$.

1. Calcula el valor de a para que el campo \vec{F} sea conservativo. (Sol. $a = 1$).
2. Para dicho valor de a , calcula la circulación de \vec{F} a lo largo de todos los arcos de parábola que unen los puntos $(1, 0)$ y $(4, 0)$ y con eje de simetría paralelo al eje OY . (Sol. $15 + \ln 4$).

■

Ejercicio 1.14 Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido como

$$\vec{F} = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2).$$

Demuestra que

$$\int_{\gamma} \vec{F} dl = 0,$$

para todo γ , camino (diferenciable) con origen el punto $(2, 1, 1)$ y final el punto $(1, 5, 1)$. ■

Veamos que en ciertas regiones del espacio euclídeo el recíproco de la afirmación 3 de Observación 1.2.14 también es cierto. Es decir, de forma coloquial: *si para todo camino cerrado la integral sobre un campo vectorial es cero, entonces el campo vectorial es conservativo*. Para ello vamos a recordar algunas nociones de topología.

Definición 1.2.11 Sea (X, τ) un espacio topológico, diremos que $M \subset X$ es un conjunto conexo, si dados $A, B \in \tau$ no vacíos, tal que $M \subset A \cup B$ y $A \cap B \cap M = \emptyset$, entonces o bien $M \subset A$, o bien, $M \subset B$.

Intuitivamente, un conjunto conexo es el que no se puede partir en dos trozos.

■ **Ejemplo 1.14**

- Conjuntos conexos: intervalo en \mathbb{R} , esfera en \mathbb{R}^2 , toro en \mathbb{R}^3 , punto de \mathbb{R}^N , el complementario de un punto en \mathbb{R}^2 .
- Conjuntos disconexos: dos esferas en \mathbb{R}^2 , dos intervalos disjuntos en \mathbb{R} , el complementario de un punto en \mathbb{R} .

■ **Definición 1.2.12** Diremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio si es abierto y conexo.

Veamos ahora la condición de arco-conexo que es un poco más exigente que ser conexo.

Definición 1.2.13 Dado (X, τ) un espacio topológico, diremos que un conjunto M contenido en X , es un conjunto arco-conexo (o conexos por arcos), si para cualesquiera $x_1, x_2 \in M$, se tiene un camino contenido en M que los conecta. Es decir, existe $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ (regular a trozos) tal que $\gamma(a) = x_1$ y $\gamma(b) = x_2$.

La conexión por arcos es una condición más fuerte que la conexión topológica.

Ejercicio 1.15 Comprueba los siguientes conceptos topológicos:

1. Demuestra que arco-conexo implica conexo.
2. El recíproco no es cierto. Para ello encuentra un contra-ejemplo.
3. Demuestra que todo dominio es arco-conexo.

Teorema 1.2.15 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio y $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo vectorial continuo. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Para todo $\gamma \subset \Omega$ camino regular y cerrado se tiene que

$$\int_{\gamma} \vec{F} = 0.$$

(ii) Para todo γ_1, γ_2 , caminos regulares que coinciden sus extremos ($\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$; $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$). Se tiene que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

(iii) \vec{F} es un campo conservativo.

Demostración.

- (i) \rightarrow (ii): Sean γ_1, γ_2 , caminos regulares que coinciden en sus extremos ($\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$; $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$). Consideremos γ_2^{-1} el camino inverso de γ_2 (es decir, $\gamma_2^{-1}(t) = \gamma_2(a+b-t)$). Así pues, si definimos $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$, es un camino cerrado y por tanto,

$$0 = \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2^{-1}} \vec{F}.$$

Por otro lado, por la Proposición 1.2.11 se tiene que $\int_{\gamma_2^{-1}} \vec{F} = -\int_{\gamma_2} \vec{F}$. De lo que se deduce de la igualdad anterior que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

- (ii) \rightarrow (iii): Fijado $P \in \Omega$, se define para todo $x \in \Omega$ el camino γ_x que va desde P a x y tal que $\gamma_x \subset \Omega$ (esto es posible al ser Ω un dominio). A continuación definimos el campo escalar $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \vec{F}.$$

Obsérvese que f está bien definida por (ii), en efecto, diferentes caminos que lleven de P a x tienen el mismo valor de integral. Por último, veamos que f es el potencial de \vec{F} . Esto es, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Para ello, basta demostrar que $\forall k = 1, \dots, N$ se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_k) - f(x)}{h} = F_k(x), \quad (1.2)$$

siendo $e_k = (0, \dots, \overset{k)}{1}, \dots, 0)$ y $\vec{F} = (F_1, \dots, F_k, \dots, F_N)$. En efecto, ya que de esta manera tendríamos que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ y son continuas al ser F_k continuo, por tanto, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Para demostrar (1.2) se tiene en cuenta que por definición de f ,

$$f(x + he_k) = \int_{\gamma_{x+he_k}} \vec{F}.$$

Por tanto, por (ii), como no depende del camino tomado, definimos

$$\gamma_{x+he_k} = \gamma_x \cup \gamma_{[x, x+he_k]}$$

siendo $\gamma_{[x, x+he_k]} = (1-t)x + t(x + he_k) = x + the_k$, con $t \in [0, 1]$ (el segmento que une x con $x + he_k$, que está contenido en Ω para h suficientemente pequeño, al ser Ω un abierto). Así pues,

$$\begin{aligned} f(x + he_k) &= \int_{\gamma_{x+he_k}} \vec{F} = \int_{\gamma_x} \vec{F} + \int_{\gamma_{[x, x+he_k]}} \vec{F} \\ &= f(x) + \int_0^1 \vec{F}(x + the_k) \cdot he_k dt = f(x) + \int_0^1 hF_k(x + the_k) dt. \end{aligned}$$

Usando el Teorema del Valor Intermedio para Integrales (TVII): *Dado $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$.* Se llega a que existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$f(x + he_k) = f(x) + hF_k(x + t_0he_k).$$

Sustituyendo en (1.2), obtenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_k) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hF_k(x + t_0 he_k)}{h} = F_k(x),$$

que es donde queríamos llegar. Nótese que en el último paso se ha usado la continuidad de F_k .

- (iii) \rightarrow (i) : Visto anteriormente en (1.1). ■

■ **Ejemplo 1.15** Dado el campo vectorial $F(x, y) = (x^2 + xy^2, x^2y + 3y^4)$, el cual está definido en todo \mathbb{R}^2 . Es conservativo, su potencial es $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{3}{5}y^5 + C$ (obsérvese que el potencial no es único). Entonces, aplicando el Teorema 1.2.15, se tiene que:

- Para $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$, $\int_{\gamma} F = 0$.
- Para γ el segmento que une los puntos $(-3, 0)$ y $(2, -1)$, $\int_{\gamma} F = f(2, -1) - f(-3, 0) = \frac{61}{15} + 9 = \frac{196}{15}$. ■

Para finalizar esta sección veremos que los campos conservativos en $N = 2$ (y diferenciables) tienen la propiedad de que sus derivadas cruzadas coinciden. Concretamente,

Lema 1.2.16 Dado $A \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $F = (F_1, F_2) : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial conservativo y $\mathcal{C}^1(A)$. Entonces,

$$\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in A.$$

Demostración. Al ser F conservativo y $\mathcal{C}^1(A)$, existirá $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con regularidad $\mathcal{C}^2(A)$ tal que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = F_1(x, y), \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = F_2(x, y).$$

Derivando la primera expresión respecto la variable y y la segunda respecto la variable x , se tiene

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x}.$$

Finalmente, usando el Teorema de Schwarz para el campo escalar f se obtiene la igualdad deseada. ■

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco no es cierto.

■ **Ejemplo 1.16** Sea el abierto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 9\}$

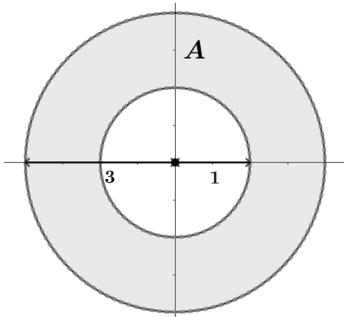


Figura 1.2.1: Ejemplo 1.16

y el campo vectorial definido como

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Claramente $F \in \mathcal{C}^1(A)$ y además,

$$\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in A.$$

En cambio, la integral de F sobre el camino cerrado $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, contenido en A es

$$\int_{\gamma} F = 2\pi \neq 0,$$

lo que, en virtud del Teorema 1.2.15, implica que F no es conservativo. ■

En el siguiente resultado se muestra que el recíproco es cierto si restringimos la topología del abierto A . Para ello, definamos primero la noción de conjunto estrellado.

Definición 1.2.14 Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ se dice estrellado con centro $P \in A$, si para todo $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in A$ el segmento $[P, \mathbf{x}] := \{(1-t)P + t\mathbf{x} : t \in [0, 1]\}$ está contenido en A .

En particular, todo conjunto convexo es estrellado con centro cualquier punto del conjunto.

Teorema 1.2.17 Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y estrellado. Consideremos el campo vectorial $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ con regularidad $\mathcal{C}^1(A)$ y tal que

$$\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in A.$$

Entonces, F es un campo conservativo.

Para su demostración recordemos el siguiente resultado el cual establece las condiciones suficientes para pasar la derivada dentro de la integral.

Proposición 1.2.18 Sean $A \times B \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ dos conjuntos abiertos y acotados y la aplicación continua $g : \bar{A} \times \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$ es continua para todo $(x, y) \in \bar{A} \times \bar{B}$. Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_A g(x, y) dx = \int_A \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) dx.$$

Demostración del Teorema 1.2.17. Sea $P = (P_1, P_2)$ el centro del conjunto estrellado A , así pues, el intervalo $[P, \mathbf{x}] \subset A$ para todo $\mathbf{x} = (x, y) \in A$. Consideremos el campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definido para todo $\mathbf{x} \in A$ como

$$f(\mathbf{x}) := \int_{[P, \mathbf{x}]} F = \int_0^1 F([P, \mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P) dt,$$

siendo $[P, \mathbf{x}] := \{(1-t)P + t\mathbf{x} : t \in [0, 1]\}$. Veamos que f es efectivamente el potencial de F y con ello se habrá demostrado que F es conservativo. Es decir, comprobemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F_1(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = F_2(x, y), \quad \forall (x, y) \in A.$$

Demostraremos la primera igualdad, siendo la segunda de la misma forma.

Usando la Proposición 1.2.18 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 F([P, \mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P) dt \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 (F_1([P, \mathbf{x}]) (x - P_1) + F_2([P, \mathbf{x}]) (y - P_2)) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial F_1([P, \mathbf{x}])}{\partial x} t (x - P_1) + F_1([P, \mathbf{x}]) + \frac{\partial F_2([P, \mathbf{x}])}{\partial x} t (y - P_2) \right) dt. \end{aligned}$$

Usando ahora la hipótesis $\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}$ se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial F_1([P, \mathbf{x}])}{\partial x} t (x - P_1) + F_1([P, \mathbf{x}]) + \frac{\partial F_1([P, \mathbf{x}])}{\partial y} t (y - P_2) \right) dt \\ &= \int_0^1 (t \nabla F_1([P, \mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P) + F_1([P, \mathbf{x}])) dt \\ &= \int_0^1 t \nabla F_1([P, \mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P) dt + \int_0^1 F_1([P, \mathbf{x}]) dt. \end{aligned}$$

Por último, integrando la primera integral por partes:

$$u = t; \quad du = dt; \quad dv = \nabla F_1([P, \mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P); \quad v = F_1([P, \mathbf{x}]),$$

se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= t F_1([P, \mathbf{x}]) \Big|_0^1 - \int_0^1 F_1([P, \mathbf{x}]) dt + \int_0^1 F_1([P, \mathbf{x}]) dt \\ &= F_1(\mathbf{x}) = F_1(x, y). \end{aligned}$$

■

1.3 Teorema de Green

En esta sección enunciaremos y demostraremos el Teorema de Green, uno de los más importantes del Análisis Vectorial, y veremos algunas de sus aplicaciones más directas. Para ello recordemos que una curva de Jordan es una curva simple y cerrada. Por otro lado, diremos que una curva de Jordan en el plano está orientada positivamente si mientras se recorre dicha curva la región acotada (o interior) se encuentra a la izquierda.

■ **Ejemplo 1.17** La curva de Jordan $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ está orientada positivamente, mientras que $\gamma_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ está orientada negativamente.

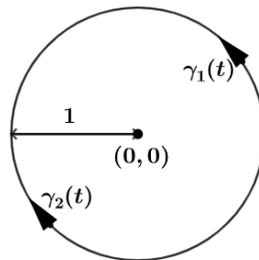


Figura 1.3.1: Ejemplo 1.17

Por otro lado, recuérdese el Teorema Clásico de la Curva de Jordan donde se establece que toda curva de Jordan en \mathbb{R}^2 divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y se le llama exterior.

Teorema 1.3.1 — Green. Sea γ una curva de Jordan en el plano, orientada positivamente y regular (a trozos). Sea D su región interior ($\gamma = \partial^+ D$). Considérese el campo vectorial $\vec{F} : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido como $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ y $\mathcal{C}^1(\bar{D})$. Entonces,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int \int_D \left(\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) d(x, y).$$

Observación 1.3.2

1. El Teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial con una integral doble en \mathbb{R}^2 de las derivadas parciales del campo vectorial.
2. En el caso que F sea un campo conservativo la igualdad es trivial al ser las dos expresiones iguales a cero.
3. Otra notación bastante usada del Teorema de Green es: si definimos el campo vectorial como $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, entonces

$$\int_{\partial^+ D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int \int_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) d(x, y).$$

4. El Teorema de Green es un resultado en \mathbb{R}^2 .

■ **Ejemplo 1.18** Compruebe el Teorema de Green para el campo vectorial $F(x, y) = (y, -x)$ y D el cuadrado del plano de lados $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

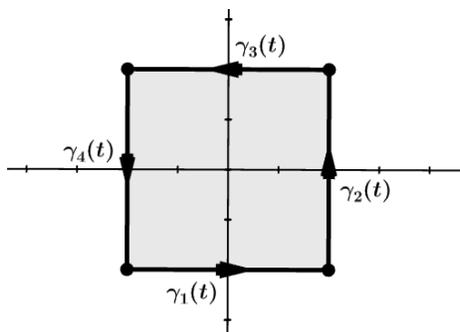


Figura 1.3.2: Ejemplo 1.18

- **Cálculo de $\int_{\gamma} \vec{F}$:** En este caso γ es el perímetro del cuadrado orientado positivamente, así pues, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, donde para todo $t \in [-1, 1]$ se tiene: $\gamma_1(t) = (t, -1)$; $\gamma_2(t) = (1, t)$ y para todo $t \in [1, -1]$ se tiene $\gamma_3(t) = (t, 1)$ y $\gamma_4(t) = (-1, t)$. De esta manera,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{F} &= \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} \vec{F} = \int_{-1}^1 (-1, -t) \cdot (1, 0) dt + \int_{-1}^1 (t, -1) \cdot (0, 1) dt \\ &\quad + \int_1^{-1} (1, -t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^{-1} (t, 1) \cdot (0, 1) dt = \\ &= \int_{-1}^1 -1 dt + \int_{-1}^1 -1 dt + \int_1^{-1} 1 dt + \int_1^{-1} 1 dt = -2 - 2 - 2 - 2 = \underline{-8}. \end{aligned}$$

- **Cálculo de $\int \int_D (\partial F_2 / \partial x - \partial F_1 / \partial y) d(x, y)$:** Como $\partial F_2 / \partial x = -1$ y $\partial F_1 / \partial y = 1$, entonces:

$$\int \int_D \left(\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) d(x, y) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -2 dx dy = \underline{-8}.$$

En este caso, la segunda integral (la doble) ha salido más sencilla que la integral de línea. No siempre es así, a menudo la integral doble suele ser más larga. ■

Ejercicio 1.16 Comprueba el Teorema de Green:

1. $\vec{F}(x, y) = (y^2 + x^3, x^4)$ y D el cuadrado del plano de lados $[0, 1] \times [0, 1]$. (Sol. 0).
2. $\vec{F}(x, y) = (x + y^2, x^2 - y^2)$ y D la región del plano limitada por $1 \leq y \leq 2 - x^2$. (Sol. -56/15).

Demostración. Teorema de Green

Supondremos que la región D es un rectángulo, de esta manera se está probando para cualquier región del plano, debido a que las integrales de Riemann provienen del límite de áreas de rectángulos. Para ello, sea R el rectángulo formado por los vértices: $(x_1, y_1); (x_2, y_1); (x_2, y_2); (x_1, y_2)$, donde estamos suponiendo que $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$. De esta manera, $\partial^+ R = \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, siendo:

$$\gamma_1(t) = (t, y_1); t \in [x_1, x_2],$$

$$\gamma_2(t) = (x_2, t); t \in [y_1, y_2],$$

$$\gamma_3(t) = (t, y_2); t \in [x_2, x_1],$$

$$\gamma_4(t) = (x_1, t); t \in [y_2, y_1].$$

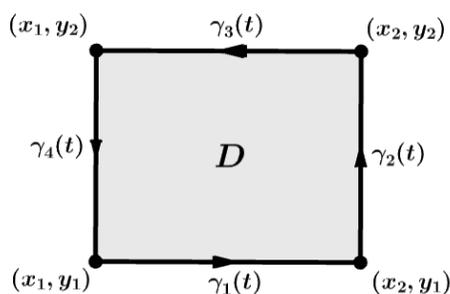


Figura 1.3.3: Teorema de Green

Así pues, si calculamos primero la primera parte de la integral doble:

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} d(x, y) &= \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{x=x_1}^{x_2} \frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} dx dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} (F_2(x_2, y) - F_2(x_1, y)) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} F_2(x_2, y) dy - \int_{y_1}^{y_2} F_2(x_1, y) dy \\ &= \int_{y_1}^{y_2} F_2(x_2, t) dt - \int_{y_1}^{y_2} F_2(x_1, t) dt \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}(x_2, t) \cdot (0, 1) dt + \int_{y_2}^{y_1} \vec{F}(x_1, t) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt + \int_{y_2}^{y_1} \vec{F}(\gamma_4(t)) \cdot \gamma_4'(t) dt \\ &= \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_4} \vec{F}. \end{aligned}$$

De la misma forma, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \iint_R \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} d(x,y) &= \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} dy dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} (F_1(x,y_2) - F_1(x,y_1)) dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} F_1(x,y_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} F_1(x,y_1) dx \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} F_1(t,y_2) dt - \int_{x_1}^{x_2} F_1(t,y_1) dt \\
 &= - \int_{x_2}^{x_1} \vec{F}(t,y_2) \cdot (1,0) dt - \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(t,y_1) \cdot (1,0) dt \\
 &= - \int_{x_2}^{x_1} \vec{F}(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t) dt - \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt \\
 &= - \int_{\gamma_3} \vec{F} - \int_{\gamma_1} \vec{F}.
 \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\iint_R \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} d(x,y) - \iint_R \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} d(x,y) = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} \vec{F} = \int_{\gamma} \vec{F},$$

lo que, concluye la demostración. ■

1.3.1 Consecuencias del Teorema de Green

Definición 1.3.1 Se dice que un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una región de Jordan si su frontera es una curva de Jordan.

Corolario 1.3.3 — Cálculo de áreas. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de Jordan y $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1(\overline{D})$ tal que $\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 1$. Entonces,

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} = \text{Area}(D).$$

Demostración. Al ser D una región de Jordan, $\partial^+ D$ es una curva de Jordan. Así pues, aplicando el Teorema de Green 2.2.6, se tiene

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} \right) d(x,y) = \iint_D 1 d(x,y) = \text{Area}(D).$$
■

Observación 1.3.4 Hay muchos candidatos de $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ que cumplen que $\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 1$, algunos ejemplos:

- $\vec{F}(x,y) = (0,x)$.
- $\vec{F}(x,y) = (-y,0)$.
- $\vec{F}(x,y) = (-y/2, x/2)$.

■ **Ejemplo 1.19** Cálculo del área de una circunferencia de radio R . Para ello tomamos $\partial^+ D = \gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $\vec{F}(x,y) = (0,x)$, entonces:

$$\text{Area}(D) = \int_{\partial^+ D} \vec{F} = \int_0^{2\pi} (0, R \cos(t)) \cdot (-R \sin(t), R \cos(t)) dt = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi R^2. \quad \blacksquare$$

Ejercicio 1.17 Calcula nuevamente el área de la circunferencia de radio R pero usando como campo vectorial: $\vec{F}(x,y) = (-y,0)$ y $\vec{F}(x,y) = (-y/2, x/2)$. ■

Corolario 1.3.5 — Teorema de Green para dominios con agujeros. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con n agujeros $\{A_k\}_{k=1,\dots,n}$ y el campo vectorial $\vec{F} : D \cup \{A_k\}_{k=1,\dots,n} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con regularidad \mathcal{C}^1 . Consideremos como γ la frontera exterior de D y $\{\gamma_k\}_{k=1,\dots,n}$ la frontera de los n agujeros (orientada positivamente respecto D). Entonces,

$$\int_{\gamma} \vec{F} + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \vec{F} = \int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y).$$

Demostración. Sean A_1, \dots, A_n los n agujeros, por tanto, $\partial^+ A_k = \gamma_k^{-1}$ para todo $k = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} \int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) &= \int \int_{D \cup_{k=1}^n A_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) \\ &\quad - \int \int_{\cup_{k=1}^n A_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) \\ &= \int \int_{D \cup_{k=1}^n A_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) - \sum_{k=1}^n \int \int_{A_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) \\ &= \int_{\gamma} \vec{F} + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \vec{F} \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado la Proposición 1.2.11 y el Teorema de Green 2.2.6 en los dominios $D \cup_{k=1}^n A_k$ y A_k . ■

- **Ejemplo 1.20** Comprobemos el Teorema de Green en el dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

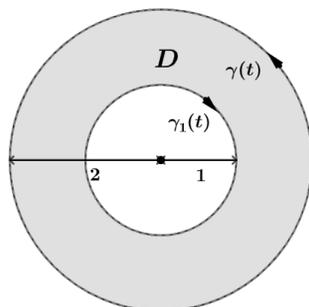


Figura 1.3.4: Ejemplo 1.20

y para el campo vectorial $F(x, y) = (y^2, x)$.

- Cálculo de $\int_{\gamma} F + \int_{\gamma_1} F$: $\gamma = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Por otro lado, y cuidado con la orientación, $\gamma_1 = (\cos(t), -\sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F + \int_{\gamma_1} F &= \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 t, 2 \cos(t))(-2 \sin(t), 2 \cos(t)) dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (\sin^2(t), \cos(t))(-\sin(t), -\cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-9 \sin^3(t) + 3 \cos^2(t)) dt \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

- Cálculo de $\int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y)$:

$$\begin{aligned} \int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y) &= \int \int_D (1 - 2y) d(x, y) \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=1}^2 (1 - 2\rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.18 Usando el corolario del Teorema de Green para agujeros, demuestra que el área de una corona circular es $\pi(R^2 - r^2)$ ($R > r$). ■

Teorema 1.3.6 — Teorema de Green generalizado. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y el campo vectorial $\vec{F} : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ con regularidad $\mathcal{C}^1(\bar{D})$. Entonces,

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} = \int \int_D \left(\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) d(x, y).$$

1.4 Ejercicios resueltos

1.4.1 Longitud de curva

Ejercicio 1.19 Calcula la longitud de la curva $\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t), t)$ desde $(a, 0, 0)$ a $(0, a, \frac{\pi}{2})$. ■

Solución:

Calculemos la longitud usando la integral. Para ello, tenemos en cuenta que la derivada de la curva es $\gamma'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), 1)$ y $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 + 1}$.

Observa que $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, ya que el punto inicial es $(a, 0, 0) = \gamma(0)$ y el punto final, $(0, a, \frac{\pi}{2}) = \gamma(\frac{\pi}{2})$.

$$l(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 + 1} dt = \frac{\sqrt{a^2 + 1} \pi}{2}.$$

Ejercicio 1.20 Calcula la longitud de la curva $\gamma(t) = (3, \ln(t+1))$ desde $(3, 0)$ a $(3, \ln(2))$. ■

Solución:

Primero calculemos la derivada de la curva, $\gamma'(t) = (0, \frac{1}{t+1})$, tal que $\|\gamma'(t)\| = \frac{1}{t+1}$, siendo el punto inicial $(3, 0) = \gamma(0)$ y el final $(3, \ln(2)) = \gamma(1)$. Así, calculamos la longitud de curva con la siguiente integral,

$$l(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln(2).$$

1.4.2 Integral de línea

Ejercicio 1.21 Calcula la integral de línea de la función $f(x, y) = \frac{x^6}{y}$, a lo largo de la curva descrita por $y = x^3$, desde $(1, 1)$ hasta $(3, 27)$. ■

Solución:

La curva viene dada por $\gamma(t) = (t, t^3)$, $t \in [1, 3]$, así, $\gamma'(t) = (1, 3t^2)$, $f(\gamma(t)) = t^3$, por lo tanto, la integral será

$$\int_{\gamma} f = \int_1^3 t^3 \sqrt{1 + 9t^4} dt = \frac{365\sqrt{730}}{27} - \frac{\sqrt{10}^{3/2}}{54}.$$

Ejercicio 1.22 Calcula la integral de línea de la función $f(x, y, z) = \frac{-2x\sqrt{1-x^2}}{z\sqrt{1+(1-x^2)^3}}$, a lo largo de la curva descrita por $\gamma(t) = (\sin(t), \tan(t), 4)$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. ■

Solución:

La derivada de la curva viene dada por $\gamma'(t) = (\cos(t), \frac{1}{\cos^2(t)}, 0)$, $f(\gamma(t)) = \frac{-\sin(t)\cos(t)}{2\sqrt{1+\cos^6(t)}}$, por lo tanto, la integral será

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(t)}{2\cos(t)} dt = \frac{-\ln(2)}{4}.$$

Ejercicio 1.23 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y) = \frac{1}{xy^2}$, a lo largo de la curva descrita por $x = y^2$, desde $(1, 1)$ hasta $(2, \sqrt{2})$. ■

Solución:

La curva viene dada por $\gamma(t) = (t, \sqrt{t})$, $t \in [1, 2]$, así, $\gamma'(t) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$, $f(\gamma(t)) = \left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$, por lo tanto, la integral será

$$\int_{\gamma} f = \int_1^2 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} dt = \frac{5^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{9}{2^{\frac{3}{2}}}.$$

Ejercicio 1.24 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y) = xe^{y^2}$, a lo largo de la curva descrita por $y = x$, desde $(0, 0)$ hasta $(3, 3)$. ■

Solución:

La curva viene dada por $\gamma(t) = (t, t)$, $t \in [0, 3]$, así, $\gamma'(t) = (1, 1)$, $f(\gamma(t)) = (te^{t^2})$, como consecuencia, la integral será

$$\int_{\gamma} f = \int_0^3 \sqrt{2}te^{t^2} dt = \frac{e^9 - 1}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 1.25 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y) = (\sqrt{1-y^2})y$, a lo largo de la curva descrita por $y = \sin(x)$, desde $(0, 0)$ hasta $(\frac{\pi}{2}, 1)$. ■

Solución:

La curva viene dada por $\gamma(t) = (t, \sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, como consecuencia tenemos que $\gamma'(t) = (1, \cos(t))$ y $f(\gamma(t)) = \left(\sqrt{1 - \sin^2(t)}\right) \sin(t) = \cos(t) \sin(t)$, por lo tanto, la integral será

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2(t)} \cos(t) \sin(t) dt = \frac{2^{3/2}}{3} - \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 1.26 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y) = (x+y)^2$, a lo largo de la curva descrita por $y = |2x|$, desde $(-2, 4)$ hasta $(2, 4)$. ■

Solución:

La curva γ viene dada por la unión de dos curvas $\gamma_1(t) = (t, -2t)$, $t \in [-2, 0]$ y $\gamma_2(t) = (t, 2t)$, $t \in [0, 2]$. Así, $\gamma_1'(t) = (1, -2)$, $f(\gamma_1(t)) = t^2$, y $\gamma_2'(t) = (1, 2)$, $f(\gamma_2(t)) = 9t^2$, entonces la integral será

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{-2}^0 \sqrt{5}t^2 dt + 9 \int_0^2 \sqrt{5}t^2 dt = \frac{8\sqrt{5}}{3} + 24\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}(80)}{3}.$$

Ejercicio 1.27 Calcula la masa de un alambre con forma de hélice $(\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t))$, $t \in [0, 2\pi]$ cuya función de densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el eje Z al punto. Ten en cuenta que en el punto inicial, el valor de la densidad es 1. ■

Solución:

La función densidad será $f(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$, como el punto inicial es $\gamma(0) = (1, 0, 0)$, entonces $f(1, 0, 0) = 1$. Por lo tanto, $k = 1$. Podemos ahora calcular la masa del alambre, siendo $f(\gamma(t)) = (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 1$, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, como

$$\int_{\gamma} f = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Ejercicio 1.28 Calcula la integral de línea para la función $\vec{F}(x, y) = (3xy + x \sin(x), \frac{3x^2}{2} + e^y)$, a lo largo de la curva que une $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(-2, 5)$. ■

Solución:

Como el conjunto (el interior del polígono que une los puntos dados) es un conjunto estrellado acotado y abierto, y se tiene que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x$, tenemos que \vec{F} es conservativo por el Teorema 1.2.17 y por lo tanto, sobre el camino cerrado γ que une los vértices (frontera del polígono anterior) la integral es

$$\int_{\gamma} \vec{F} = 0.$$

Ejercicio 1.29 Considera el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2 + \frac{y}{x}, \ln(|x|) + z^2, 2zy)$, calcula la integral de línea para esa función, a lo largo de un camino γ , que une $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 2)$. ■

Solución:

Veamos si \vec{F} es un campo conservativo, calculando su función potencial. Para ello, consideramos que el gradiente del potencial será \vec{F} , entonces, si f es la función potencial, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{y}{x},$$

por tanto,

$$f = x^3 + y \ln(|x|) + C(y, z).$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(|x|) + \frac{\partial C(y, z)}{\partial y} = \ln(|x|) + z^2,$$

por lo que $C(y, z) = z^2 y + K(z)$, así,

$$f = x^3 + y \ln(|x|) + z^2 y + K(z).$$

Por último,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zy + \frac{\partial K(z)}{\partial z} = 2zy,$$

por lo que $K(z) = 0$, teniendo que la función potencial es

$$f = x^3 + y \ln(|x|) + z^2 y.$$

Calculamos entonces la integral de línea como

$$\int_{\gamma} \vec{F} = f(1, 2, 2) - f(1, 1, 1) = 7.$$

Ejercicio 1.30 Calcula la integral de línea de la función $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{-y^2}{x^2+y^2} \right)$, a lo largo de la curva más pequeña sobre la circunferencia de radio 2 que une el punto $(0, 2)$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. ■

Solución:

Tendremos la siguiente situación:

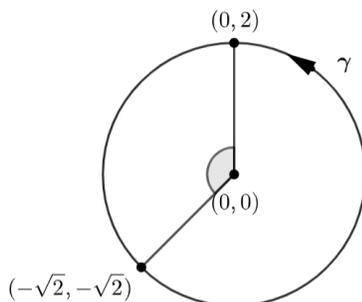


Figura 1.4.1: Ejercicio 1.30

La curva que describe esta circunferencia será $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ para t entre los ángulos que unen los puntos del enunciado.

Igualamos los puntos a la parametrización para obtener el intervalo de t .

- $0 = 2 \cos(t), 2 = 2 \sin(t)$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$.
- $-\sqrt{2} = 2 \cos(t), -\sqrt{2} = 2 \sin(t)$, entonces $t = \frac{5\pi}{4}$.

Teniendo en cuenta la orientación de la curva γ , el camino más corto será el que describe la curva para $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4} \right]$, calculemos entonces la integral.

Siendo $\gamma'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t))$, $\vec{F}(\gamma(t)) = (\cos(t) \sin(t), -\sin^2(t))$, la integral de línea sería

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} -4 \cos(t) \sin^2(t) dt = -4 \left[\frac{\sin^3(t)}{3} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} = 4 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}} \right).$$

1.4.3 Teorema de Green

Teorema de Green sin agujeros

Ejercicio 1.31 Dado D como la superficie encerrada entre $y = e^x$, $y = 1$, $x = a$, $x = b$ con $0 < a < b$, calcula la suma de las integrales de línea usando el Teorema de Green para D , con $\vec{F}(x, y) = (-\cos(x)\ln(y), \sin(x))$. ■

Solución:

Consideramos el Teorema de Green para obtener la suma de las integrales de línea, que nos diría

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y).$$

Donde γ sería la curva que describe nuestro recinto. La integral doble sería

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_1^{e^x} \left(\cos(x) + \frac{\cos(x)}{y} \right) dy dx &= \int_a^b \cos(x) \int_1^{e^x} \left(1 + \frac{1}{y} \right) dy dx = \int_a^b \cos(x) [y + \ln(y)]_1^{e^x} dx \\ &= \int_a^b \cos(x)(e^x + x - 1) dx = \int_a^b \cos(x)e^x dx + \int_a^b \cos(x)x dx - \int_a^b \cos(x) dx. \end{aligned}$$

Que mediante el uso del método de integración por partes se queda como:

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(x)e^x dx + \int_a^b \cos(x)x dx - \int_a^b \cos(x) dx &= \\ \left[\frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} \right]_a^b + [x \sin(x) + \cos(x)]_a^b - [\sin(x)]_a^b. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.32 Dado D como la superficie encerrada entre el eje de abscisa, $x = 1$, $x = e$ y $\ln(x) = y$, calcula las integrales de línea usando el Teorema de Green para D , con $\vec{F}(x, y) = (e^y, xy)$. ■

Solución:

Consideramos el Teorema de Green para obtener la suma de las integrales de línea, que nos diría

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y).$$

Donde γ sería la curva que describe nuestro recinto. La integral doble sería

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} (y - e^y) dy dx = \int_1^e \left(\frac{\ln^2 x}{2} - x + 1 \right) dx = \frac{3e - e^2 - 3}{2}.$$

Ejercicio 1.33 Usa el Teorema de Green para calcular la masa de un alambre cuya forma es la de la función $y = \ln(x)$ comprendida entre $x = 1$, $x = e$, si la densidad en cada punto está dada por el cuadrado de su abscisa. ■

Solución:

La curva a integrar es $\gamma(t) = (t, \ln(t))$ para $t \in [1, e]$ y la densidad es $f(x, y) = x^2$, por lo que podemos calcular la integral de línea como

$$\int_{\gamma} f = \int_1^e t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^e t \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{3} \left((1 + e^2)^{3/2} - 2^{3/2} \right).$$

Ejercicio 1.34 Comprueba el Teorema de Green para la función $\vec{F}(x, y) = (-4y, 4x)$ en un círculo de radio a centrado en $(0, 0)$. ■

Solución:

En primer lugar, calculamos la integral de línea. La curva que describe la circunferencia orientada positivamente respecto al círculo dado, es $\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t))$, $\vec{F}(\gamma(t)) = (-4a \sin(t), 4a \cos(t))$, la integral de línea sería

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int_0^{2\pi} 4a^2 dt = 8a^2\pi.$$

Calculamos ahora la integral doble. Como $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 4$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -4$, tenemos que, siguiendo el Teorema de Green, la integral de línea será igual a

$$\iint_D 8 d(x, y) = \int_0^a \int_0^{2\pi} 8\rho d\theta d\rho = 8a^2\pi.$$

Donde D es el círculo y donde hemos usado el cambio a coordenadas polares $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$.

Ejercicio 1.35 Calcula el valor de la integral de línea de una elipse centrada en $(1, 1)$ de ejes 4, 2, usando el Teorema de Green para la función $\vec{F}(x, y) = (e^x + 4y, 2\ln(y^2 + e^y) + x)$. ■

Solución:

Calculemos entonces la integral doble de $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -3$, usando el Teorema de Green la integral de línea será igual a

$$\iint_D -3 d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -24\rho d\rho d\theta = -24\pi.$$

Donde D es el interior de la elipse dada por la ecuación $\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$, y donde usamos el cambio de coordenadas correspondiente a esa elipse, $x = 4\rho \cos(\theta) + 1$, $y = 2\rho \sin(\theta) + 1$.

Ejercicio 1.36 Comprueba el Teorema de Green para el triángulo formado por los vértices $(0, \frac{1}{2})$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, para la función $\vec{F}(x, y) = (x^2y, 5xy)$. ■

Solución:

Tendremos la siguiente situación:

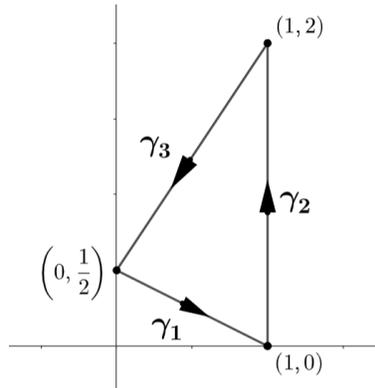


Figura 1.4.2: Ejercicio 1.36

Calculemos las integrales de línea de las trayectorias orientadas positivamente:

1. $\gamma_1(t) = (t, \frac{1-t}{2})$, $t \in [0, 1]$, $\gamma_1'(t) = (1, \frac{-1}{2})$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (\frac{t^2-t^3}{2}, \frac{5t-5t^2}{2})$, la integral de línea es

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \frac{-1}{6}.$$

2. $\gamma_2(t) = (1, 2t)$, $t \in [0, 1]$, $\gamma_2'(t) = (0, 2)$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (2t, 10t)$, la integral de línea es

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = 10.$$

3. $\gamma_3(t) = (1-t, 2-\frac{3t}{2})$, $t \in [0, 1]$, $\gamma_3'(t) = (-1, \frac{-3}{2})$, $\vec{F}(\gamma_3(t)) = (\frac{(1-t)^2(4-3t)}{2}, \frac{5(1-t)(4-3t)}{2})$, la integral de línea es

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \frac{-37}{6}.$$

El total será $\frac{11}{3}$.

Calculamos ahora la integral doble.

Como $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 5y$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = x^2$, tenemos que, siguiendo el Teorema de Green, las integrales de línea serán igual a

$$\int_0^1 \int_{\frac{1-x}{2}}^{\frac{1+3x}{2}} (5y - x^2) dy dx = \int_0^1 (5x^2 + 5x - 2x^3) dx = \frac{11}{3}.$$

Ejercicio 1.37 Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y) = (y, 2x^2)$, a lo largo del triángulo formado por los vértices $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$.

Solución:

El triángulo se puede representar como:

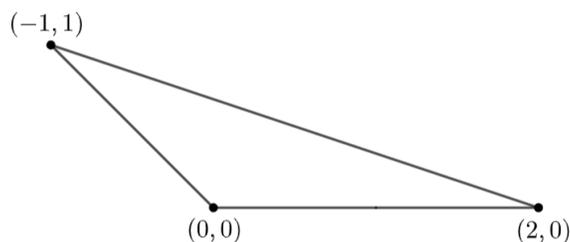


Figura 1.4.3: Ejercicio 1.37

Podemos usar el Teorema de Green para obtener las integrales de línea de la función,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \iint_D (4x - 1) d(x,y).$$

Donde D será nuestro triángulo. Para calcular la integral doble identifiquemos las tres rectas que forman su borde.

1. Recta que une $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

$$y = 0.$$

2. Recta que une $(-1, 1)$ y $(2, 0)$.

$$y = \frac{2-x}{3}.$$

3. Recta que une $(-1, 1)$ y $(0, 0)$.

$$y = -x.$$

Así, la integral doble quedará como:

$$\begin{aligned} \iint_D (4x - 1) d(x,y) &= \int_{-1}^0 \int_{-x}^{\frac{2-x}{3}} (4x - 1) dy dx + \int_0^2 \int_0^{\frac{2-x}{3}} (4x - 1) dy dx \\ &= \int_{-1}^0 (4x - 1) \left(\frac{2+2x}{3} \right) dx + \int_0^2 (4x - 1) \left(\frac{2-x}{3} \right) dx = \frac{-7}{9} + \frac{10}{9} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.38 Usa el Teorema de Green para calcular el área del polígono que une los puntos $(0,0)$, $(3,1)$, $(5,4)$, $(0,5)$. ■

Solución

El polígono en cuestión sería:

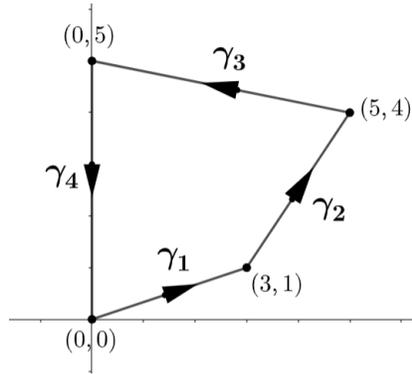


Figura 1.4.4: Ejercicio 1.38

Consideremos una función de manera que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$, así, el Teorema de Green nos dará el valor del área en función de las integrales de línea. Sea esta función $\vec{F}(x,y) = (0,x)$, calculemos las integrales de línea del polígono orientadas positivamente:

1. $\gamma_1(t) = (3t,t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_1'(t) = (3,1)$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0,3t)$, así, la integral de línea será

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \frac{3}{2}.$$

2. $\gamma_2(t) = (3+2t, 1+3t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2'(t) = (2,3)$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0,3+2t)$, por lo tanto, la integral de línea será

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = 12.$$

3. $\gamma_3(t) = (5-5t, 4+t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_3'(t) = (-5,1)$, $\vec{F}(\gamma_3(t)) = (0,5-5t)$, la integral de línea será

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \frac{5}{2}.$$

4. $\gamma_4(t) = (0, 5-5t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_4'(t) = (0,-5)$, $\vec{F}(\gamma_4(t)) = (0,0)$, así, la integral de línea será

$$\int_{\gamma_4} \vec{F} = 0.$$

Por lo tanto, el valor total del área será 16.

Ejercicio 1.39 Usa el Teorema de Green para calcular el área de la mitad superior de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ■

Solución:

Nos piden calcular el área de:

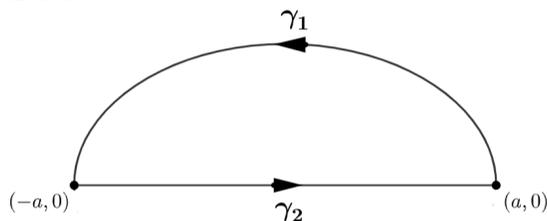


Figura 1.4.5: Ejercicio 1.39

Consideramos la curva que describe la parte superior del borde de la elipse, γ_1 y la que une $(-a, 0)$ a $(a, 0)$, γ_2 . Realizaremos la integral de línea para una función $\vec{F}(x, y)$, que satisfaga $\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} = 1$, como $\vec{F}(x, y) = (0, x)$. Entonces,

1. $\gamma_1(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$, $\gamma_1'(t) = (-a \sin(t), b \cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, a \cos(t))$, la integral será

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_0^{\pi} ab \cos^2(t) dt = \frac{ab\pi}{2}.$$

2. $\gamma_2(t) = (-a + 2at, 0)$, $t \in [0, 1]$, $\gamma_2'(t) = (2a, 0)$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0, -a + 2at)$, la integral de línea queda como

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = 0.$$

El área es $\frac{ab\pi}{2}$.

Ejercicio 1.40 Calcula el área, en el primer cuadrante, encerrada por las curvas que describen una elipse de semiejes $(2, 1)$ y la circunferencia de radio 1, ambas centradas en $(0, 0)$. ■

Solución

Estaríamos ante el siguiente caso:

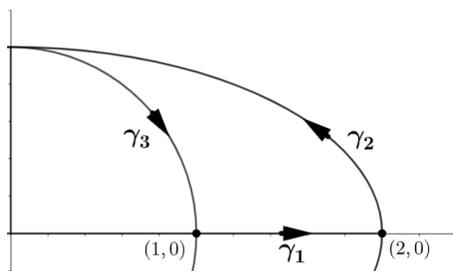


Figura 1.4.6: Ejercicio 1.40

Consideremos la función $\vec{F}(x, y) = (0, x)$ y calculemos el área a partir de las integrales de línea que describen la figura, $\gamma_1(t)$ que describe el segmento desde $(1, 0)$ a $(2, 0)$, $\gamma_2(t)$ que describe la parte de la elipse y $\gamma_3(t)$ que describe la circunferencia con orientación negativa.

1. $\gamma_1(t) = (t+1, 0)$, $t \in [0, 1]$, $\gamma_1'(t) = (1, 0)$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, t+1)$. La integral de línea sería

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = 0.$$

2. $\gamma_2(t) = (2 \cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\gamma_2'(t) = (-2 \sin(t), \cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0, 2 \cos(t))$. La integral de línea sería

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{2}.$$

3. $\gamma_3(t) = (\cos(t), -\sin(t))$, $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, $\gamma_3'(t) = (-\sin(t), -\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_3(t)) = (0, \cos(t))$. La integral de línea sería

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2(t) dt = \frac{-\pi}{4}.$$

Así, el área será $\frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 1.41 Comprueba el Teorema de Green para la función $\vec{F}(x, y) = (3y, -x)$ en D , dado por la región, en el primer cuadrante, del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 2, que se encuentra comprendida entre $y = x$ y $y = 0$.

Solución:

Un dibujo del problema será:

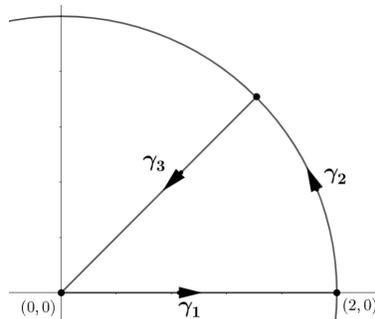


Figura 1.4.7: Ejercicio 1.41

Calcularemos las integrales de línea de las curvas orientadas positivamente respecto a la figura dada.

La frontera de nuestra figura, D , está dada por tres curvas: $\gamma_1(t)$ que une $(0, 0)$ a $(2, 0)$, $\gamma_2(t)$ que describe la parte de la circunferencia que va desde $(2, 0)$ hasta el punto de corte de la circunferencia y la recta, y finalmente $\gamma_3(t)$ que una el punto de corte al punto $(0, 0)$.

Calculemos primero el punto de corte entre la circunferencia y la recta.

La circunferencia, frontera del círculo dado, será $x^2 + y^2 = 4$, por lo que el punto de corte con la recta $y = x$, se calcula como

$$2y^2 = 4.$$

Siendo este punto de corte $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, que si tenemos en cuenta la parametrización de la circunferencia dada por $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, se alcanzará este punto de corte en el ángulo $\frac{\pi}{4}$. Así, podemos calcular las integrales de línea.

1. $\gamma_1(t) = (2t, 0)$ para $t \in [0, 1]$, $\gamma_1'(t) = (2, 0)$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, -2t)$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = 0.$$

2. $\gamma_2(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, con la derivada como $\gamma_2'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t))$ y $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (6 \sin(t), -2 \cos(t))$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-12 \sin^2(t) - 4 \cos^2(t)) dt = 2 - 2\pi.$$

3. $\gamma_3(t) = (\sqrt{2} - \sqrt{2}t, \sqrt{2} - \sqrt{2}t)$ para $t \in [0, 1]$, con derivada $\gamma_3'(t) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $\vec{F}(\gamma_3(t)) = (3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t, -\sqrt{2} + \sqrt{2}t)$, obteniendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \int_0^1 (4t - 4) dt = -2.$$

Así, el total será -2π .

Calculamos ahora la integral doble, siendo $\frac{\partial F_2}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3$,

$$\int \int_D -4 d(x, y) = -4 \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \rho d\theta d\rho = -2\pi.$$

Queda comprobado el Teorema de Green.

Teorema de Green con agujeros

Ejercicio 1.42 Usa el Teorema de Green con agujeros para calcular el área del triángulo de vértices $(0, \frac{1}{2})$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ con un agujero circular de radio $\frac{1}{8}$, centrada en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Solución:

Estaríamos ante el siguiente caso:

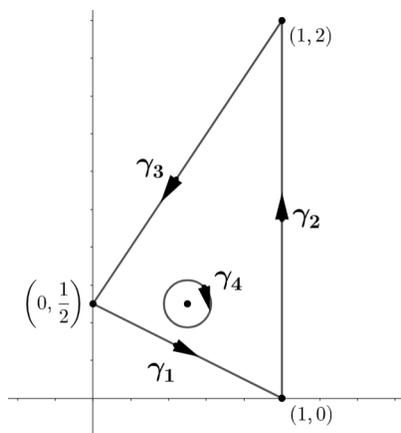


Figura 1.4.8: Ejercicio 1.42

Consideramos la función $\vec{F}(x, y) = (0, x)$ y calculamos las integrales de línea que nos darán, siguiendo el Teorema de Green, el área de la figura.

Consideramos las curvas del triángulo orientadas positivamente:

1. $\gamma_1(t) = (t, \frac{1-t}{2})$, $t \in [0, 1]$, $\gamma_1'(t) = (1, \frac{-1}{2})$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, \frac{1-t}{2})$, la integral de línea será

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \frac{-1}{4}.$$

2. $\gamma_2(t) = (1, 2t)$, $t \in [0, 1]$, $\gamma_2'(t) = (0, 2)$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0, 1)$, la integral de línea será

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = 2.$$

3. $\gamma_3(t) = (1-t, 2 - \frac{3t}{2})$, $t \in [0, 1]$, $\gamma_3'(t) = (-1, \frac{-3}{2})$, $\vec{F}(\gamma_3(t)) = (0, 1-t)$, la integral de línea será

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \frac{-3}{4}.$$

Siendo el total del área del triángulo 1.

Ahora, consideramos la circunferencia orientada positivamente respecto a nuestra figura

$$\gamma_4 = \left(\frac{1}{8} \cos(t) + \frac{1}{2}, \frac{-1}{8} \sin(t) + \frac{1}{2} \right)$$

para $t \in [0, 2\pi]$. Así, $\gamma_4'(t) = (\frac{-1}{8} \sin(t), \frac{-1}{8} \cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_4(t)) = (0, \frac{1}{8} \cos(t) + \frac{1}{2})$, por lo tanto,

$$\int_{\gamma_4} \vec{F} = \frac{1}{64} \int_0^{2\pi} -\cos^2(t) dt - \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \cos(t) dt = \frac{-\pi}{64}.$$

Así, el área de la figura será $\int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F} + \int_{\gamma_4} \vec{F} = 1 - \frac{\pi}{64}$.

Ejercicio 1.43 Usa el Teorema de Green para calcular la suma de integrales de línea sobre la trayectoria que describe la frontera del disco $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, para $\vec{F}(x, y) = (x^2 + y^2, x)$. ■

Solución:

Usando el Teorema de Green calculemos esa integral de línea a partir de una integral doble sobre el disco.

$$\int_{\partial D} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y) = \iint_D (1 - 2y) d(x, y).$$

Usando ahora el cambio de variable $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, tenemos que

$$\iint_D (1 - 2y) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 (1 - 2\rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta = 3\pi.$$

Ejercicio 1.44 Usa el Teorema de Green con agujeros para calcular el área de un círculo de centro $(0, 0)$ y radio 4, con un orificio formado por un círculo de radio 1 centrado en $(2, 0)$. ■

Solución:

Consideremos la función $\vec{F}(x, y) = (0, x)$ para calcular el área a partir de las integrales de línea según el Teorema de Green.

Podemos esbozar nuestra figura como:

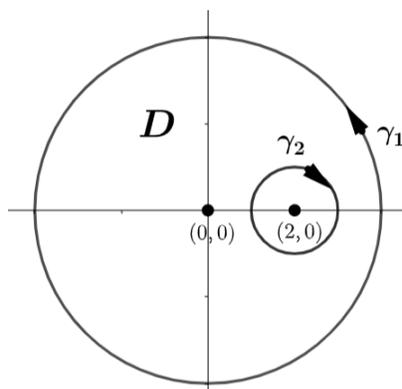


Figura 1.4.9: Ejercicio 1.44

La frontera del círculo de centro $(0, 0)$ estará descrita por $x^2 + y^2 = 16$, por lo tanto, la curva orientada positivamente respecto a nuestra figura será:

$$\gamma_1(t) = (4 \cos(t), 4 \sin(t))$$

para $t \in [0, 2\pi]$. Así, $\gamma_1'(t) = (-4 \sin(t), 4 \cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, 4 \cos(t))$,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = 16 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = 16\pi.$$

La frontera del círculo de centro $(2, 0)$ estará descrita por $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, por lo tanto, la curva orientada positivamente respecto a nuestra figura será:

$$\gamma_2(t) = (\cos(t) + 2, -\sin(t))$$

para $t \in [0, 2\pi]$. Como consecuencia, $\gamma_2'(t) = (-\sin(t), -\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0, \cos(t) + 2)$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = - \int_0^{2\pi} (\cos^2(t) + 2\cos(t)) dt = -\pi.$$

Por lo tanto, el área de nuestra figura será $\int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = 15\pi$.

Ejercicio 1.45 Calcula la suma de las integrales de línea del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \left(y, x \left(\frac{2y}{3} \right)^2 \right),$$

sobre las curvas que forman la frontera de la corona elíptica centrada en $(a, 0)$,

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 36 < 9(x - a)^2 + 4y^2 < 72\}.$$

Solución:

La corona está formada por dos elipses.

Elipse exterior:

$$\left(\frac{x - a}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{3\sqrt{2}} \right)^2 = 1.$$

Elipse interior:

$$\left(\frac{x - a}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{3} \right)^2 = 1.$$

Un esbozo de la figura sería.

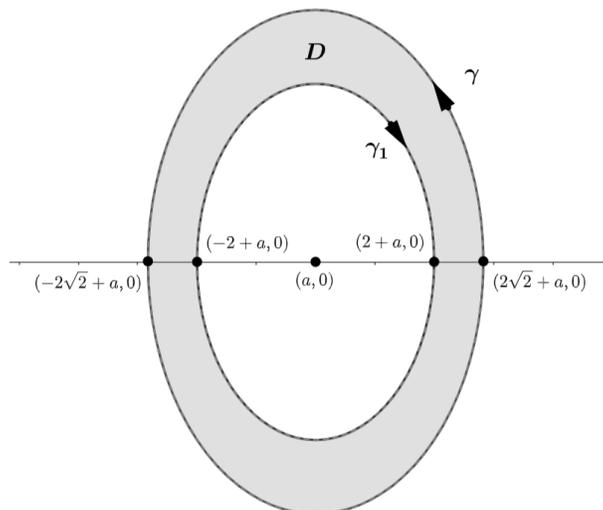


Figura 1.4.10: Ejercicio 1.45

Consideramos el Teorema de Green para obtener la suma de las integrales de línea, siendo γ la curva que describe la elipse exterior y γ_1 la curva que describe la elipse interior, ambas orientadas de forma positiva respecto a D .

$$\int_{\gamma} \vec{F} + \int_{\gamma_1} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y).$$

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \left(\frac{2y}{3} \right)^2 - 1.$$

Calculamos la integral doble con el cambio coordenadas $x = 2\rho \cos(\theta) + a$, $y = 3\rho \sin(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [1, \sqrt{2}]$.

$$\int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} 6\rho (4\rho^2 \sin^2 \theta - 1) d\rho d\theta = 12\pi.$$

Ejercicio 1.46 Usa el Teorema de Green con agujeros para calcular el área de

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 + 2y < x^2 + y^2 < 4 + 2y\}.$$

Solución:

En este caso, D es una corona circular centrada en $(0, 1)$,

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x^2 + (y-1)^2 < 5\}.$$

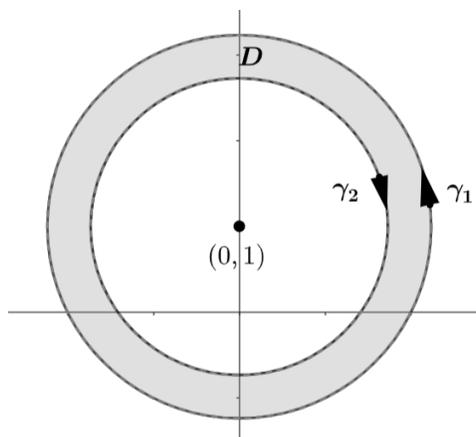


Figura 1.4.11: Ejercicio 1.46

Usando el Teorema de Green podemos obtener al área a partir de las integrales de línea. Usemos la función $\vec{F}(x,y) = (0,x)$, siendo las curvas orientadas positivamente respecto a D :

1. $\gamma_1(t) = (\sqrt{5}\cos(t), \sqrt{5}\sin(t) + 1)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_1'(t) = (-\sqrt{5}\sin(t), \sqrt{5}\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, \sqrt{5}\cos(t))$, la integral de línea será

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_0^{2\pi} 5\cos^2(t) dt = 5\pi.$$

2. $\gamma_2(t) = (\sqrt{3}\cos(t), -\sqrt{3}\sin(t) + 1)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_2'(t) = (-\sqrt{3}\sin(t), -\sqrt{3}\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0, \sqrt{3}\cos(t))$, la integral de línea será

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_0^{2\pi} -3\cos^2(t) dt = -3\pi.$$

Así, el área total será 2π .

Ejercicio 1.47 Calcula el área de la siguiente figura usando el Teorema de Green.

La región de la corona elíptica

$$4 \leq (x-1)^2 + 2y^2 \leq 12,$$

que queda entre $y = 0$ e $y = x$, con $x \geq 1$, $y \geq 0$.

Solución:

La corona está formada por dos elipses.

Elipse exterior:

$$\left(\frac{x-1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1.$$

Elipse interior:

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Estaríamos ante el siguiente caso:

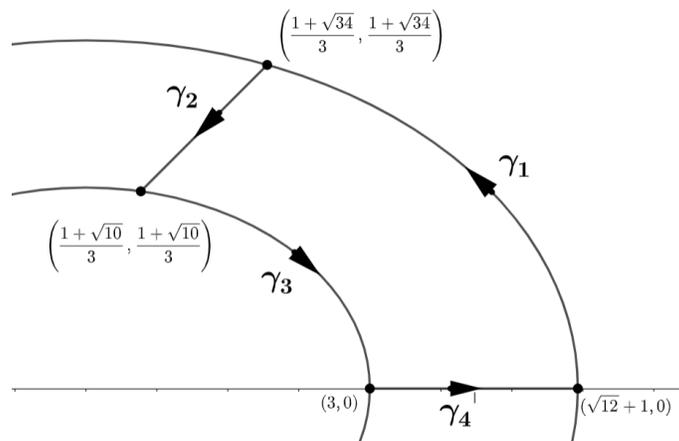


Figura 1.4.12: Ejercicio 1.47

Usamos el Teorema de Green para obtener el área, siempre que seleccionemos un \vec{F} adecuado, tal que la diferencia entre las derivadas parciales cruzadas sea 1, por ejemplo $\vec{F}(x, y) = (0, x)$.

Consideramos γ_1 la curva que describe la elipse exterior entre los puntos de corte con $y = 0$ e $y = x$, γ_2 la que describe el segmento que une las dos elipses, γ_3 la curva que describe la elipse interior entre los puntos de corte con $y = x$ e $y = 0$, γ_4 la recta que une los puntos de intersección de la recta $y = 0$ y las dos elipses.

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F} + \int_{\gamma_4} \vec{F} = \int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y) = \int \int_D 1 d(x, y).$$

Primero, necesitamos calcular los puntos de intersección de la recta $y = x$ con las elipses exterior e interior.

1. Punto corte con elipse interior.

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = x. \end{cases}$$

Resolviendo $3x^2 - 2x - 3 = 0$ obtenemos el punto de corte $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3} \right)$.

2. Punto corte con elipse exterior.

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1, \\ y = x. \end{cases}$$

Resolviendo $3x^2 - 2x - 11 = 0$ obtenemos el punto de corte $\left(\frac{1+\sqrt{34}}{3}, \frac{1+\sqrt{34}}{3} \right)$.

Así pues, las cuatro curvas serían las siguientes.

1. La elipse exterior dada por

$$\gamma_1(t) = (\sqrt{12} \cos(t) + 1, \sqrt{6} \sin(t)) \quad t \in [0, d_1].$$

Siendo d_1 el ángulo en el que se encuentra la intersección de la elipse y la recta $y = x$. Para calcularlo, igualamos la parametrización de la elipse a la intersección, $\frac{1+\sqrt{34}}{3} = \sqrt{12} \cos(t) + 1$, $\frac{1+\sqrt{34}}{3} = \sqrt{6} \sin(t)$ con $t = d_1$ el ángulo para el que se cumple las igualdades anteriores. Así, la integral de línea con $\gamma_1'(t) = (-\sqrt{12} \sin(t), \sqrt{6} \cos(t))$ y $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, \sqrt{12} \cos(t) + 1)$, será

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_0^{d_1} (6\sqrt{2} \cos^2(t) + \sqrt{6} \cos(t)) dt = \sqrt{6} \sin(d_1) + 3\sqrt{2}(d_1 + \cos(d_1) \sin(d_1)).$$

2. En cuanto a γ_2 , tenemos que

$$\gamma_2(t) = \left(\frac{1+\sqrt{34}}{3} + \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right) t, \frac{1+\sqrt{34}}{3} + \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right) t \right)$$

para $t \in [0, 1]$. Entonces $\gamma_2'(t) = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3}, \frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right)$, $\vec{F}(\gamma_2) = \left(0, \frac{1+\sqrt{34}}{3} + \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right) t \right)$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_0^1 \left(\frac{(1+\sqrt{34})(\sqrt{10}-\sqrt{34})}{9} + \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right)^2 t \right) dt = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}-12}{9}.$$

3. La elipse interior dada por

$$\gamma_3^{-1}(t) = (2 \cos(t) + 1, \sqrt{2} \sin(t)) \quad t \in [0, d_2].$$

Siendo d_2 el ángulo en el que se encuentra la intersección de la elipse y la recta $y = x$. Este se obtiene, como el anterior, igualando la parametrización de la elipse a la intersección, $\frac{1+\sqrt{10}}{3} = 2 \cos(t) + 1$, $\frac{1+\sqrt{10}}{3} = \sqrt{2} \sin(t)$. Siendo d_2 el ángulo para el que se cumple las igualdades anteriores. Así, la integral de línea con $(\gamma_3^{-1})'(t) = (-2 \sin(t), \sqrt{2} \cos(t))$ y $\vec{F}(\gamma_3^{-1}(t)) = (0, 2 \cos(t) + 1)$, será

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = - \int_{\gamma_3^{-1}} \vec{F} = - \int_0^{d_2} (2\sqrt{2} \cos^2(t) + \sqrt{2} \cos(t)) dt = -\sqrt{2}(d_2 + \sin d_2(1 + \cos d_2)).$$

4. Por último, la curva γ_4 que consiste en el segmento que une los puntos $(3, 0)$ y $(\sqrt{12} + 1, 0)$, es

$$\gamma_4(t) = (3 + (\sqrt{12} - 2)t, 0)$$

para $t \in [0, 1]$. Entonces $\gamma_4'(t) = (\sqrt{12} - 2, 0)$, $\vec{F}(\gamma_4) = (0, 3 + (\sqrt{12} - 2)t)$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_4} \vec{F} = 0.$$

Así, el área es

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F} + \int_{\gamma_4} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F}.$$

Ejercicio 1.48 Usa el Teorema de Green con agujeros para calcular el área de la figura D , el interior de un círculo de radio 2 y centro $(1, 0)$, con un agujero formado por el círculo centrado en $(1, 0)$, de radio 1, cortado por la recta $2x - 3 = y$. ■

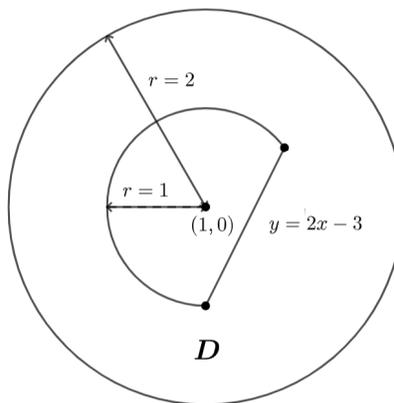


Figura 1.4.13: Enunciado del ejercicio 1.48

Solución:

Lo que obtenemos aquí es:

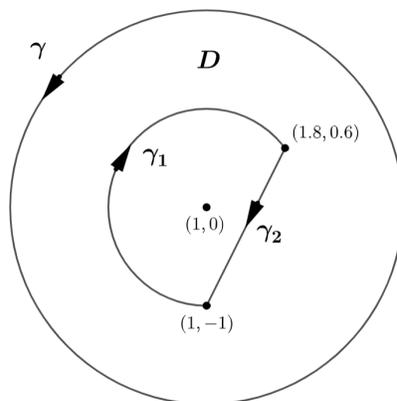


Figura 1.4.14: Ejercicio 1.48

Usando el Teorema de Green con agujeros podemos obtener el área, siempre que seleccionemos un \vec{F} adecuado, tal que la resta entre las derivadas parciales es 1, por ejemplo $\vec{F}(x,y) = (0,x)$. Necesitamos tener definidas las tres curvas.

1. El círculo exterior dado por

$$\gamma(t) = (2 \cos(t) + 1, 2 \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$$

tal que

$$\gamma'(t) = (-2 \sin(t), 2 \cos(t))$$

cuya integral de línea sería

$$\int_0^{2\pi} (4 \cos^2(t) + 2 \cos(t)) dt = 4\pi.$$

2. El círculo interior dado por

$$\gamma_1(t) = (\cos(t) + 1, -\sin(t))$$

donde t se encuentra entre los ángulos que describen los puntos de intersección de la recta y el círculo de radio 1. Se calcularían sabiendo que el círculo interior está dado por $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y la recta sería $y = 2x - 3$, igualando y y despejando tenemos que

$$5y^2 + 2y - 3 = 0.$$

Obteniendo los puntos de corte $(1, -1)$ y $(1, 8, 0, 6)$. Así, tendría que cumplirse que para el primer punto, $(1, -1)$, $0 = \cos(t)$, $1 = \sin(t)$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$ y que para el segundo punto $(1, 8, 0, 6)$, $0, 8 = \cos(t)$, $0, 6 = \sin(t)$, sea $t = d$ el que cumple esas condiciones.

Teniendo que

$$\gamma_1(t) = (\cos(t) + 1, -\sin(t)), t \in \left[\frac{\pi}{2}, d\right],$$

tal que

$$\gamma_1'(t) = (-\sin(t), -\cos(t)).$$

Calculamos la integral de línea,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^d (-\cos^2(t) - \cos(t)) dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^d \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t) - \cos(t) \right) dt \\ &= \frac{\pi - 2d}{4} - \frac{\sin(2d)}{4} - \sin(d) + 1. \end{aligned}$$

3. Por otro lado, consideramos el segmento que va de $(1,8, 0,6)$ a $(1, -1)$:

$$\gamma_2(t) = (1,8 - 0,8t, 0,6 - 1,6t), t \in [0, 1],$$

donde,

$$\gamma_2'(t) = (-0,8, -1,6).$$

Calculamos la integral de línea.

$$\int_0^1 (-2,88 + 1,28t) dt = -2,24.$$

Así, el área es $\int_{\gamma} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_1} \vec{F}$.

Ejercicio 1.49 Calcula el área de la siguiente figura usando el Teorema de Green para agujeros. Una corona elíptica centrada en $(0, 2)$, cuyo interior es

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 144 < (3x)^2 + 16(y-2)^2 < 288\},$$

y su elipse interior está cortada por la recta $y = 5 - 2x$ y el punto $(0, 2)$. ■

Solución:

La corona está formada por dos elipses.

Elipse exterior:

$$\left(\frac{x}{4\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{y-2}{3\sqrt{2}} \right)^2 = 1.$$

Elipse interior:

$$\left(\frac{x}{4} \right)^2 + \left(\frac{y-2}{3} \right)^2 = 1.$$

Estaríamos ante el siguiente caso:

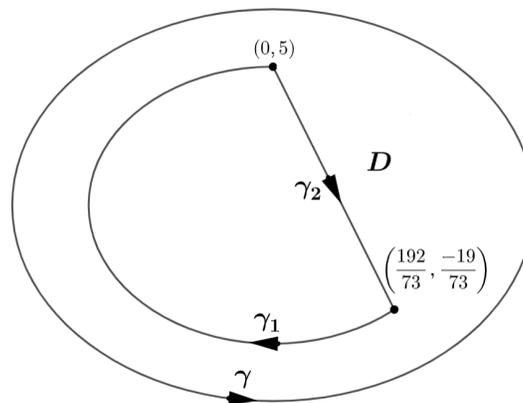


Figura 1.4.15: Ejercicio 1.49

Usando el Teorema de Green con agujeros podemos obtener el área, siempre que seleccionemos un \vec{F} adecuado, tal que la resta entre sus derivadas parciales sea 1, por ejemplo $\vec{F}(x,y) = (0,x)$.

Considerando γ la curva que describe la elipse exterior, γ_1 la curva que describe la elipse interior y γ_2 la que describe la recta, orientadas de forma positiva respecto a nuestra figura D, tenemos que:

$$\int_{\gamma} \vec{F} + \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \iint_D 1 d(x,y).$$

Así que necesitamos tener definidas las tres curvas.

1. La elipse exterior dada por

$$\gamma(t) = (4\sqrt{2} \cos(t), 3\sqrt{2} \sin(t) + 2), t \in [0, 2\pi]$$

cuya integral de línea sería

$$\int_0^{2\pi} 24 \cos^2(t) dt = 24\pi.$$

2. La elipse interior dada por

$$\gamma_1^{-1}(t) = (4 \cos(t), 3 \sin(t) + 2),$$

donde t iría entre los ángulos que representan los puntos de intersección de la recta con la elipse interior. Se calcularían sabiendo que la elipse interior está dada por $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1$ y la recta sería $y = 5 - 2x$, igualando y despejando, tenemos que los puntos de corte son $(0, 5)$ y $\left(\frac{192}{73}, \frac{-19}{73}\right)$. Así, tendría que cumplirse que $0 = \cos(t)$, $1 = \sin(t)$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$ y que $\frac{48}{73} = \cos(t)$, $\frac{-55}{73} = \sin(t)$, llamemos d a la t que cumple esas condiciones. Teniendo que

$$\gamma_1^{-1}(t) = (4 \cos(t), 3 \sin(t) + 2) t \in \left[\frac{\pi}{2}, d\right],$$

donde,

$$(\gamma_1^{-1})'(t) = (-4 \sin(t), 3 \cos(t)).$$

Calculemos la integral de línea.

$$\int_{\gamma_1^{-1}} \vec{F} = \int_{\frac{\pi}{2}}^d 12 \cos^2(t) dt = 6d - 3\pi + 3 \sin(2d).$$

3. Por otro lado, consideramos la recta que va de $(0, 5)$ a $\left(\frac{192}{73}, \frac{-19}{73}\right)$,

$$\gamma_2(t) = (0, 5) + \left(\frac{192}{73}, \frac{-384}{73}\right) t, t \in [0, 1],$$

tal que

$$\gamma_2'(t) = \left(\frac{192}{73}, \frac{-384}{73}\right).$$

Calculamos la integral de línea.

$$\int_0^1 \frac{-384 \cdot 192}{73^2} t dt = \frac{-36864}{5329}.$$

Así, teniendo ahora en cuenta la orientación, el área será

$$\int_{\gamma} \vec{F} - \int_{\gamma_1^{-1}} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

Teorema de Green generalizado

Ejercicio 1.50 Usando el teorema de Green generalizado, demuestra que considerando el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$, entonces $\int_{\gamma} \vec{F} = 2\pi$, siendo γ cualquier camino cerrado con el origen en su interior. ■

Solución:

Como el origen está en el interior de la región acotada por γ , podemos considerar $\gamma_1(t) = (a \cos(t), -a \sin(t))$, para $t \in [0, 2\pi]$, la circunferencia en sentido horario con centro el origen y radio a , con a suficientemente pequeño tal que se encuentre en el interior de la curva γ .

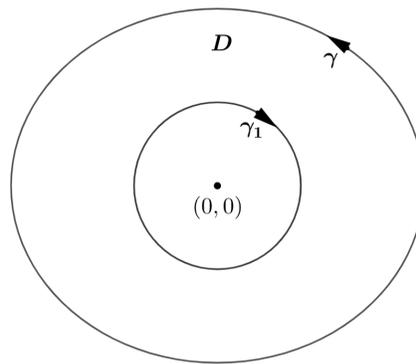


Figura 1.4.16: Ejercicio 1.50

Considerando como D el dominio acotado por las curvas γ y γ_1 , tendremos, por el Teorema de Green generalizado, que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma} \vec{F} = \int_{\partial D} \vec{F} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y).$$

Por un lado, si calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Por tanto,

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x, y) = 0.$$

Así pues, $\int_{\gamma} \vec{F} = -\int_{\gamma_1} \vec{F} = 2\pi$. Ya que,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(t)}{a}, \frac{\cos(t)}{a} \right) (-a \sin(t), -a \cos(t)) dt = -2\pi.$$

2. Integración en superficies. Teorema de Stokes

2.1 Superficies

En este capítulo vamos a hacer un tratamiento básico de las superficies en \mathbb{R}^3 , que guarda cierto paralelismo con el estudio de los caminos en el plano hecho en el capítulo anterior.

Definición 2.1.1 Sea Γ una curva de Jordan (en el plano) y D su región interior, llamaremos recinto de \mathbb{R}^2 a $\bar{D} = \Gamma \cup D$.

■ **Ejemplo 2.1** Ejemplos clásicos de recintos en \mathbb{R}^2 :

1. Rectángulo: $[a, b] \times [c, d]$.
2. Bolas cerradas: $B(x_0; R) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_0\| \leq R\}$.

Definición 2.1.2 Dado \bar{D} un recinto, llamaremos parametrización de una superficie a toda aplicación $\Phi : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, con regularidad $\mathcal{C}^1(\bar{D})$. De esta manera, definimos superficie S al conjunto

$$S = \{\Phi(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

En general, la parametrización de la superficie se escribirá como

$$\Phi(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}.$$

Diremos que una superficie S es simple si Φ es inyectiva en D .

■ **Ejemplo 2.2 — Ejemplos típicos de superficies.**

1. *Trozo del plano*: Dados dos vectores del espacio $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un punto. Entonces tenemos la superficie:

$$\pi : (x_0, y_0, z_0) + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad (\lambda, \mu) \in \bar{D} = [a, b] \times [c, d].$$

y su parametrización:

$$\Phi(\lambda, \mu) = (x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1, y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2, z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3), \quad (\lambda, \mu) \in \bar{D}.$$

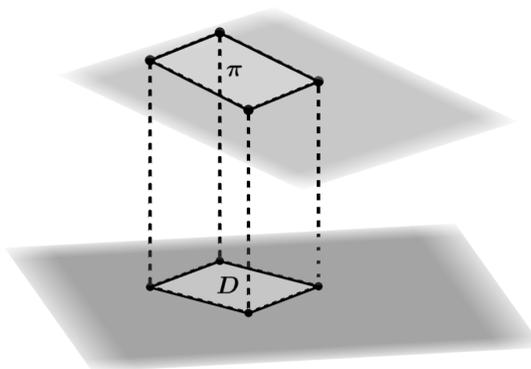


Figura 2.1.1: Trozo del plano

2. $\Phi(u, v) = (3 \cos u, 3 \sin u, v)$, con $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [0, 4]$. Es la parametrización de un cilindro de radio 3 y altura 4.

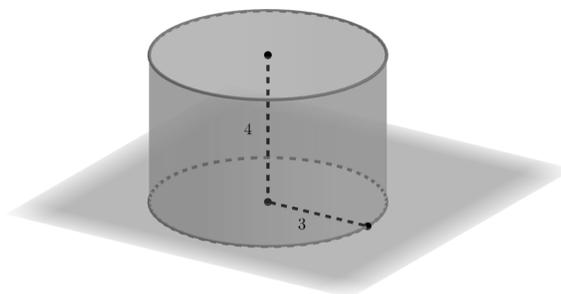


Figura 2.1.2: Cilindro

3. $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, con $u \in [0, \pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$. Es la parametrización de una esfera de centro 0 y radio 1.

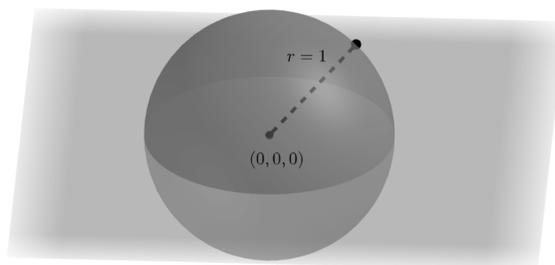


Figura 2.1.3: Esfera

4. La esfera de centro $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y radio R :

$$\Phi(u, v) = (x_0 + R \sin u \cos v, y_0 + R \sin u \sin v, z_0 + R \cos u),$$

con $u \in [0, \pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$.

5. El elipsoide de centro $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y semi-ejes $a, b, c > 0$:

$$\Phi(u, v) = (x_0 + a \sin u \cos v, y_0 + b \sin u \sin v, z_0 + c \cos u),$$

con $u \in [0, \pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$.

6. Superficie dada una función explícita: Sea $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1(\bar{D})$, entonces su superficie es

$$S = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in \bar{D}\}.$$

- Cono: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, con $(x, y) \in \bar{D}$

$$C = \{(u, v, \sqrt{u^2 + v^2}) : (u, v) \in \bar{D}\}.$$

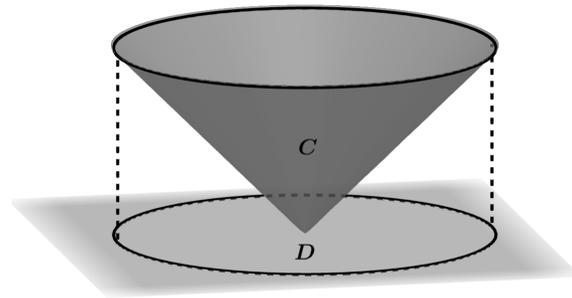


Figura 2.1.4: Cono

- Paraboloides: $f(x, y) = x^2 + y^2$, con $(x, y) \in \bar{D}$

$$P = \{(u, v, u^2 + v^2) : (u, v) \in \bar{D}\}.$$

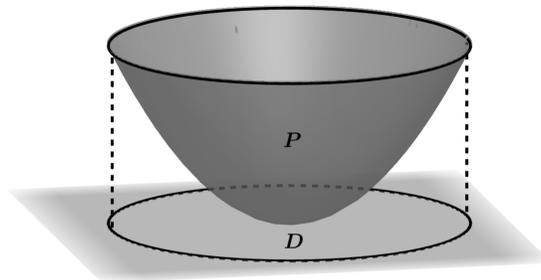


Figura 2.1.5: Paraboloides

■

2.1.1 Plano tangente y vector normal

Definición 2.1.3 Dada una superficie $S = \{\Phi(u, v) : (u, v) \in \overline{D}\}$. Se definen los vectores tangentes a S en un punto $(u_0, v_0) \in \overline{D}$ como los vectores no nulos:

$$\vec{T}_u(u_0, v_0) = \frac{\partial}{\partial u} \Phi(u, v)|_{(u_0, v_0)}.$$

$$\vec{T}_v(u_0, v_0) = \frac{\partial}{\partial v} \Phi(u, v)|_{(u_0, v_0)}.$$

■ **Ejemplo 2.3** Sea S la esfera de centro el origen de coordenadas y radio 1. Es decir, $\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, con $u \in [0, \pi]$ y $v \in [0, 2\pi]$. Entonces, dado un punto $(u_0, v_0) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, su vectores tangentes son:

$$\vec{T}_u(u_0, v_0) = (\cos u_0 \cos v_0, \cos u_0 \sin v_0, -\sin u_0).$$

$$\vec{T}_v(u_0, v_0) = (-\sin u_0 \sin v_0, \sin u_0 \cos v_0, 0).$$

■ **Definición 2.1.4** Se define el vector normal de S en $(u_0, v_0) \in \overline{D}$ como el vector no nulo:

$$\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{T}_u(u_0, v_0) \times \vec{T}_v(u_0, v_0).$$

■ **Ejemplo 2.4** El vector normal de la esfera S en un punto $(u_0, v_0) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \vec{n}(u_0, v_0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos u_0 \cos v_0 & \cos u_0 \sin v_0 & -\sin u_0 \\ -\sin u_0 \sin v_0 & \sin u_0 \cos v_0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \sin^2 u_0 \cos v_0 + \vec{j} \sin^2 u_0 \sin v_0 + \vec{k} \sin u_0 \cos u_0 \\ &= (\sin^2 u_0 \cos v_0, \sin^2 u_0 \sin v_0, \sin u_0 \cos u_0). \end{aligned}$$

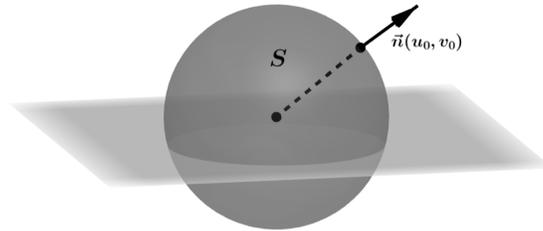


Figura 2.1.6: Vector normal de S

Definición 2.1.5 Llamaremos plano tangente a la superficie S en $(u_0, v_0) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ a los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que cumplan la ecuación:

$$\Pi : \vec{n}(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

siendo $(x_0, y_0, z_0) = \Phi(u_0, v_0)$.

■ **Ejemplo 2.5** Tomamos el punto de la esfera $u_0 = \pi/2, v_0 = 0$. Entonces sus vectores tangentes son:

$$\vec{T}_u(\pi/2, 0) = (0, 0, -1), \quad \vec{T}_v(\pi/2, 0) = (0, 1, 0)$$

su vector normal es:

$$\vec{n}(\pi/2, 0) = (1, 0, 0)$$

y, como $\Phi(\pi/2, 0) = (1, 0, 0)$ su plano tangente es

$$\Pi : (1, 0, 0) \cdot (x - 1, y, z) = 0$$

$$\Pi : x = 1.$$

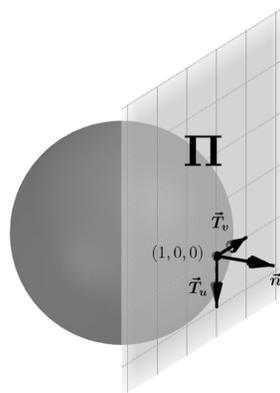


Figura 2.1.7: Plano tangente Π

Ejercicio 2.1 Calcula los vectores tangentes, el vector normal y el plano tangente del cilindro $\Phi(u, v) = (3 \cos u, 3 \sin u, v)$, con $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [0, 4]$, en el punto $(u_0, v_0) = (3\pi/2, 2)$. ■

Definición 2.1.6 Se dice que una superficie S es suave en un punto $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$, cuando existe un plano Π que contiene a las rectas tangentes en el punto p .

Lógicamente, decimos también que Π es un plano tangente a la superficie S en el punto p y que todo vector normal al plano Π es un vector normal a la superficie S en el punto p . A veces, debido a la ecuación paramétrica de la superficie, es posible que el vector normal en un punto sea nulo. En ese caso, se calculará el plano tangente usando otras herramientas.

Salvo en casos degenerados a los que no prestaremos mucha atención, siempre existen dos curvas contenidas en la superficie cuyas rectas tangentes en el punto p son diferentes, con lo que el plano Π está determinado de forma única y podemos decir que Π es el plano tangente a la superficie S en el

punto p . Por otro lado, diremos que una superficie es suave a trozos si es suave salvo en un conjunto de medida nula.

Decir que un vector es el vector normal a la superficie en un punto es incurrir en una ambigüedad, para dos vectores normales a una superficie en un mismo punto podremos afirmar habitualmente que uno es múltiplo escalar del otro.

La única recta perpendicular al plano tangente en el punto p es la recta normal a la superficie S en el punto p y estará determinada de forma única cuando lo esté el plano tangente, lo que como hemos dicho ocurrirá en todos los casos que nos interesan.

2.1.2 Área de una superficie

Definición 2.1.7 Dada una superficie $S = \{\Phi(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ suave (a trozos), entonces se define el área de S como

$$A(S) = \int \int_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| d(u, v) = \int \int_D \|\vec{n}(u, v)\| d(u, v)$$

■ Ejemplo 2.6

- Área del cono. $\bar{D} = \{\theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]\}$, $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$. Obsérvese que las componentes de Φ cumplen $x^2 + y^2 = z^2$, al tratarse de un cono de radio y altura 1
 - $\Phi_r(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$.
 - $\Phi_\theta(r, \theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$.
 - $\vec{n}(r, \theta) = \Phi_r(r, \theta) \times \Phi_\theta(r, \theta) = (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r)$.
 - $\|\vec{n}(r, \theta)\| = r\sqrt{2}$.
 - $A(S) = \int \int_D \|\vec{n}(r, \theta)\| d(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{2} dr d\theta = \sqrt{2}\pi$.
- Área del helicoides. $\bar{D} = \{\theta \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]\}$, $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$.

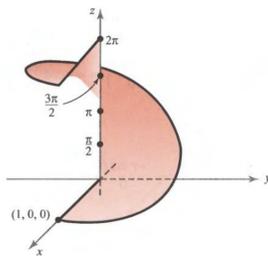


Figura 2.1.8: Helicoides

- $\Phi_r(r, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$.
- $\Phi_\theta(r, \theta) = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1)$.
- $\vec{n}(r, \theta) = \Phi_r(r, \theta) \times \Phi_\theta(r, \theta) = (\sin \theta, -\cos \theta, r)$.
- $\|\vec{n}(r, \theta)\| = \sqrt{1 + r^2}$.
- $A(S) = \int \int_D \|\vec{n}(r, \theta)\| d(r, \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} dr d\theta = \pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$.

3. Área paraboloides hiperbólico. $\bar{D} = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, $z = x^2 - y^2$.

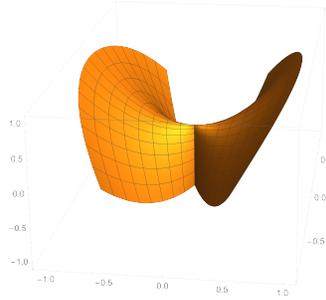


Figura 2.1.9: Paraboloides hiperbólico

- $\Phi(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$.
 - $\Phi_x(x, y) = (1, 0, 2x)$.
 - $\Phi_y(x, y) = (0, 1, -2y)$.
 - $\vec{n}(x, y) = \Phi_x(x, y) \times \Phi_y(x, y) = (-2x, 2y, 1)$.
 - $\|\vec{n}(x, y)\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$.
 - $A(S) = \int_{\bar{D}} \|\vec{n}(x, y)\| d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta = \frac{\pi(5\sqrt{5}-1)}{6}$.
4. Área de una gráfica. $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in \bar{D}$. La superficie está parametrizada de la siguiente forma: $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ con $(u, v) \in \bar{D}$.
- $\Phi_u(u, v) = (1, 0, f_u(u, v))$
 - $\Phi_v(u, v) = (0, 1, f_v(u, v))$
 - $\vec{n}(u, v) = \Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v) = (-f_u(u, v), -f_v(u, v), 1)$
 - $\|\vec{n}(u, v)\| = \sqrt{1 + f_u(u, v)^2 + f_v(u, v)^2}$
 - $A(S) = \int_{\bar{D}} \|\vec{n}(u, v)\| d(u, v) = \int_{\bar{D}} \sqrt{1 + f_u(u, v)^2 + f_v(u, v)^2} d(u, v)$.

Ejercicio 2.2 Calcula el área de un cono de radio R y altura h .

2.1.3 Integral de superficie de un campo escalar

Definición 2.1.8 Sea $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ un recinto, $\Phi : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(\bar{D})$. Si consideramos $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, entonces se define la integral de superficie del campo escalar f con respecto a la parametrización Φ , como

$$\iint_S f ds := \iint_{\bar{D}} f(\Phi(u, v)) \|\vec{n}(u, v)\| d(u, v),$$

siendo $\vec{n}(u, v) = \Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)$ el vector normal de la superficie S en $(u, v) \in \bar{D}$.

Observación 2.1.1

1. Obsérvese que la continuidad del campo escalar f asegura la existencia de la última integral.
2. Como era de esperar, si el campo escalar es la unidad entonces dicha integral de superficie equivale al área de la superficie:

$$\iint_S 1 ds = \iint_{\bar{D}} 1 \|\vec{n}(u, v)\| d(u, v) = \text{área}(S).$$

■ **Ejemplo 2.7**

1. Sea S como superficie el helicoido: $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1]$ y el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido como

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Entonces,

$$\int \int_S f ds = \frac{8\pi}{3}.$$

2. Sea $S : \{z = x^2 + y : 0 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$ y el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definido como $f(x, y, z) = x$. Entonces,

$$\int \int_S f ds = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right).$$

■

Ejercicio 2.3 Prueba que

$$\int \int_S z^2 ds = \frac{4\pi}{3}$$

siendo S la esfera unidad centrada en el origen.

■

2.1.4 Superficies orientables

Definición 2.1.9 Dada $S = \Phi(\bar{D})$ una superficie, definimos una orientación en S como la aplicación continua

$$\begin{aligned} N : \bar{D} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\rightarrow \vec{n}(u, v) \end{aligned}$$

Diremos que una superficie S es orientable si admite dos orientaciones N_1, N_2 diferentes ($N_1 \neq N_2$).

Todas las superficies tratadas en este curso son orientables ya que tenemos dos vectores normales en cada punto de la superficie:

$$N_1 = \Phi_u \times \Phi_v, \quad N_2 = \Phi_v \times \Phi_u.$$

$$N_1 = -N_2.$$

Un ejemplo clásico de superficie no orientable es la banda de Möbius que tiene una única cara:

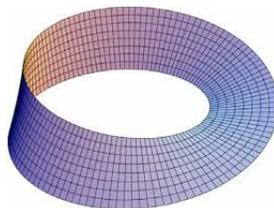


Figura 2.1.10: Banda de Möbius

2.1.5 Integral de superficie de un campo vectorial

Definición 2.1.10 Sea $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ un recinto, $\Phi : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(\bar{D})$. Si consideramos $\vec{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo, entonces se define la integral de superficie del campo vectorial \vec{F} con respecto a la parametrización Φ , como

$$\int \int_S \vec{F} \, ds := \int \int_D \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, d(u, v),$$

siendo $\vec{n}(u, v) = \Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)$ el vector normal de la superficie S en $(u, v) \in \bar{D}$.

Observación 2.1.2

1. Al igual que en la integral de superficie de campos escalares, la continuidad del campo vectorial \vec{F} asegura la existencia de la última integral.
2. Se le suele denominar como integral de flujo del campo vectorial a la integral de superficie de un campo vectorial.
3. Debido a la existencia de dos vectores normales el valor de la integral de superficie es único salvo signo.
4. Notación clásica: $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

$$\int \int_S \vec{F} \, ds = \int \int_{\Phi} P(x, y, z) \, d(y, z) + Q(x, y, z) \, d(x, z) + R(x, y, z) \, d(x, y).$$

■ **Ejemplo 2.8** Sea S la esfera de radio R y centro el origen de coordenadas. $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial definido como $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Entonces,

$$\int \int_S \vec{F} \, ds = 4\pi R^3.$$

■

Ejercicio 2.4 Ley de Gauss: Sea S la esfera de radio R y centro el origen de coordenadas y \vec{E} el campo electrostático, entonces

$$\int \int_S \vec{E} \, ds = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

El flujo electrostático es independiente del radio de la esfera. ■

2.1.6 Independencia de la parametrización

Si bien la definición de integrales de superficie tanto para campos escalares como de campos vectoriales dependen de la parametrización Φ de la superficie, a continuación probaremos que si una superficie admite diferentes parametrizaciones, estas integrales coinciden. Para ello véase el siguiente ejemplo demostrativo:

■ **Ejemplo 2.9** Sea S el cono dado en las parametrizaciones:

$$\Phi_1(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r); \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\Phi_2(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2}); \quad \bar{D} = \{0 \leq u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Considérese el campo escalar $f(x, y, z) = z$. Entonces,

$$\int \int_{S_{\Phi_1}} f ds = \int \int_{S_{\Phi_2}} f ds = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

■

Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 2.1.11 Dados \bar{D}_1, \bar{D}_2 dos recintos de \mathbb{R}^2 y $\Phi_1 : \bar{D}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi_2 : \bar{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones. Diremos que son equivalentes ($\Phi_1 \approx \Phi_2$) si existe una aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : D_1 &\rightarrow D_2 \\ (u, v) &\rightarrow (\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v)) \end{aligned}$$

biyectiva y $\mathcal{C}^1(D_1)$ (salvo en conjuntos de medida nula), tal que

$$\Phi_1(u, v) = \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v)).$$

Equivalentemente, $\Phi_1(D_1) = \Phi_2(\Psi(D_1))$.

De esta manera, en el ejemplo anterior, las dos parametrizaciones son equivalentes. En efecto, basta con tomar

$$\Psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi].$$

A continuación establecemos que la integral sobre parametrizaciones equivalentes de un mismo campo escalar se mantiene invariante.

Teorema 2.1.3 Sean dos parametrizaciones equivalentes $\Phi_1 : \bar{D}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : \bar{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dado $f : \Phi_1(\bar{D}_1) \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo.

Entonces,

$$\int \int_{S_{\Phi_1}} f ds = \int \int_{S_{\Phi_2}} f ds.$$

Demostración. Queremos ver que

$$\int \int_{S_{\Phi_1}} f ds = \int \int_{S_{\Phi_2}} f ds,$$

equivalentemente,

$$\int \int_{D_1} f(\Phi_1(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \right\| d(u, v) = \int \int_{D_2} f(\Phi_2(s, t)) \left\| \frac{\partial \Phi_2}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right\| d(s, t). \quad (2.1)$$

Desarrollamos la primera integral. Para ello, como

$$\Phi_1(u, v) = \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(u, v)}{\partial u} &= \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial u} \\ &= \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial t} \frac{\partial \Psi_2(u, v)}{\partial u}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(u, v)}{\partial v} &= \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial v} \\ &= \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial s} \frac{\partial \Psi_1(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial t} \frac{\partial \Psi_2(u, v)}{\partial v}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Usando las igualdades (2.2) y (2.3) y teniendo en cuenta que $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ y $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} &= \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial t} \\ &\quad \cdot \left[\frac{\partial \Psi_1(u, v)}{\partial u} \frac{\partial \Psi_2(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial \Psi_1(u, v)}{\partial v} \frac{\partial \Psi_2(u, v)}{\partial u} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera integral de (2.1) quedaría así:

$$\begin{aligned} \int \int_{D_1} f(\Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))) \left\| \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial t} \right\| \\ \left| \frac{\partial \Psi_1(u, v)}{\partial u} \frac{\partial \Psi_2(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial \Psi_1(u, v)}{\partial v} \frac{\partial \Psi_2(u, v)}{\partial u} \right| d(u, v). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Por otro lado, desarrollamos la segunda integral de (2.1) mediante el cambio de variable:

$$s = \Psi_1(u, v), \quad t = \Psi_2(u, v),$$

y se obtiene

$$\int \int_{\Psi^{-1}(D_2)} f(\Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))) \left\| \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial s} \times \frac{\partial \Phi_2(\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v))}{\partial t} \right\| \quad (2.5)$$

$$|\det J(u, v)| d(u, v).$$

Por último, teniendo en cuenta que $\Psi^{-1}(D_2) = D_1$ casi para todo subconjunto de medida no nula (y al ser Ψ biyectiva) y además,

$$\det J(u, v) = \frac{\partial \Psi_1(u, v)}{\partial u} \frac{\partial \Psi_2(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial \Psi_1(u, v)}{\partial v} \frac{\partial \Psi_2(u, v)}{\partial u}.$$

Sustituyendo en (2.5), se llega a la misma expresión que (2.4). Por lo que se prueba la igualdad de (2.1). ■

Ejercicio 2.5 Enuncia y demuestra el resultado anterior para campos vectoriales. ■

2.2 Teorema de Stokes

Antes de enunciar el Teorema de Stokes se va a definir la noción de rotacional de un campo vectorial.

Definición 2.2.1 Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1(\Omega)$ definido como

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Entonces, se define el campo vectorial rotacional de \vec{F} como

$$\begin{aligned} \vec{rot}F(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x, y, z) & F_2(x, y, z) & F_3(x, y, z) \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial z}, \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial z} - \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Observación 2.2.1

1. El rotacional de un campo vectorial es un campo vectorial.
2. Si tomamos la notación $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, entonces se puede definir el operador rotacional como

$$\vec{rot}F = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

3. En el siguiente enlace se puede ver una interpretación geométrica del rotacional: [khanacademy](#)
4. Diremos que un campo vectorial es irrotacional si $\vec{rot}F = \vec{0}$.

■ Ejemplo 2.10

1. Dado $\vec{F}(x, y, z) = (0, \cos(xz), -\sin(xy))$, entonces

$$\vec{rot}F(x, y, z) = (x \sin(xz) - x \cos(xy), y \cos(xy), -z \sin(xz)).$$

2. Dado $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$, entonces

$$\vec{rot}F(x, y, z) = (0, 0, 0) = \vec{0}.$$

Recordemos que dado un abierto $A \subset \mathbb{R}^3$ y un campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con regularidad $\mathcal{C}^1(A)$, $\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ es un campo vectorial. Además, dado un campo vectorial \vec{F} , decimos que es conservativo si existe un campo escalar $f \in \mathcal{C}^1(A)$ (también llamado potencial) tal que $\vec{\nabla}f = \vec{F}$.

El siguiente resultado nos va a identificar los campos conservativos de \mathbb{R}^3 con aquellos con rotacional nulo. Antes de enunciarlo se recuerda el siguiente teorema clásico.

Teorema 2.2.2 — Teorema de Schwarz. Dado un abierto $A \subset \mathbb{R}^3$ y un campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con regularidad $\mathcal{C}^2(A)$ entonces las derivadas cruzadas de segundo orden coinciden en todo punto de A .

Ejercicio 2.6 Encuentra un campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ que no sea $\mathcal{C}^2(A)$ y no cumpla el Teorema de Schwarz. ■

Lema 2.2.3 Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1(\Omega)$ y conservativo. Entonces

$$\vec{rot}F = \vec{0}.$$

Demostración. Si \vec{F} es conservativo y es $\mathcal{C}^1(\Omega)$, entonces existe un campo escalar $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con regularidad $\mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\vec{\nabla}f = \vec{F}$. En particular,

$$\begin{aligned} \vec{rot}F(x,y,z) &= \vec{rot}\nabla f(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right). \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad se ha usado el Teorema de Schwarz. ■

Ejercicio 2.7 El recíproco no es cierto. Para ello encuentra un campo vectorial con $\vec{rot}F = \vec{0}$ y que no sea conservativo. ■

■ **Ejemplo 2.11** El campo vectorial del Ejemplo 2.10 (2) es un campo conservativo, donde su potencial es

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z.$$

Nótese que si f es su potencial, también lo es $f + \text{constante}$. ■

A continuación enunciaremos el Teorema de Stokes, el cual establece que la integral de flujo del rotacional de un campo vectorial a través de una superficie suave (a trozos) y orientable es igual a la integral de línea de dicho campo vectorial en el borde de la misma superficie.

Teorema 2.2.4 — Teorema de Stokes. Sea S una superficie suave con regularidad \mathcal{C}^2 (salvo en un conjunto de medida nula) y orientable con una orientación definida por el campo de vectores normales $\vec{n}(u,v)$. Representemos por ∂^+S el borde de S con la orientación inducida por dicho vector normal. Sea \vec{F} un campo vectorial de clase \mathcal{C}^1 definido en un abierto que contenga a S . Entonces se verifica que

$$\int_{\partial^+S} \vec{F} dl = \int_S \vec{rot}F ds.$$

Observación 2.2.5

- Consideramos el borde de una superficie $S = \{\Phi(u, v) : (u, v) \in \bar{D}\}$ como $\partial^+ S = \Phi(\partial^+ D)$.
- Si S es una superficie cerrada (no tiene borde), entonces para cualquier \vec{F} campo vectorial \mathcal{C}^1 se tiene

$$\int \int_S \vec{rot} F ds = 0.$$

- El Teorema de Stokes se cumple trivialmente en el caso de campos vectoriales \vec{F} conservativos. En efecto, por el Lema 2.2.3 se tiene que $\vec{rot} F = \vec{0}$. Por otro lado, la integral de \vec{F} sobre un camino cerrado es nula.
- **Ejemplo 2.12** Comprobar el Teorema de Stokes en los siguientes ejemplos:
1. $\vec{F}(x, y, z) = (y, -xz, x^2 + z)$. Siendo S el cono de radio 1 (Sol. 2π).
 2. $\vec{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$. Siendo $S = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{x + y + z = 1\}$ (Sol. $3\pi/2$).

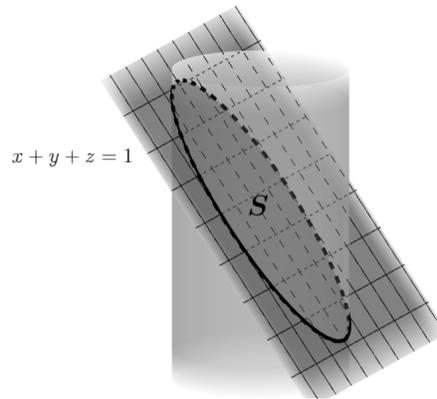


Figura 2.2.1: S. Ejemplo 2.12. Apartado 2

3. $\vec{F}(x, y, z) = (y, -x, xz)$. Siendo S la semiesfera superior de radio a (Sol. $-2\pi a^2$).
4. $\vec{F}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$. Siendo $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2, y \geq 0\}$ (Sol. $-32/3$).

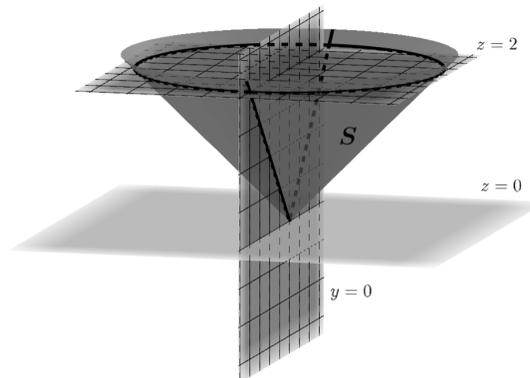


Figura 2.2.2: S. Ejemplo 2.12. Apartado 4

5. Utiliza el Teorema de Stokes para evaluar $\int \int_S \vec{r} \otimes F$, siendo la función vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (z + e^{x^2-y} - \arctan(yz), y^2z, z)$ y como superficie S la parte del hemisferio $x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$ dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 4$, que está orientado en la dirección del eje x positivo. (Sol. -4π).

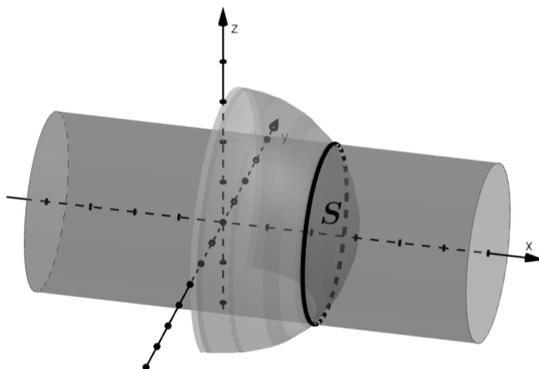


Figura 2.2.3: S . Ejemplo 2.12. Apartado 5

A continuación vamos a comprobar que el Teorema de Green es un caso particular del Teorema de Stokes.

Teorema 2.2.6 — Green. Sea γ una curva de Jordan en el plano, orientada positivamente y regular (a trozos). Sea D su región interior, esto es, $\gamma(t) = \partial^+ D = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Considérese el campo vectorial $\vec{F} : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido como $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ y $\mathcal{C}^1(\bar{D})$. Entonces,

$$\int_{\gamma} \vec{F} = \int \int_D \left(\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) d(x, y).$$

Demostración. Consideremos la región \bar{D} como una superficie de \mathbb{R}^3 , esto es:

$$S = \{\Phi(u, v) = (u, v, 0) : (u, v) \in \bar{D}\},$$

de esta manera, $\vec{n}(u, v) = (0, 0, 1)$ y $\partial^+ S = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)$.

Extendamos ahora el campo vectorial \vec{F} , definido en dimensión 2, a un campo vectorial, \vec{G} , en dimensión 3:

$$\vec{G} = (F_1, F_2, 0).$$

Así pues, usando el Teorema de Stokes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ D} \vec{F} dl &= \int_{\partial^+ S} \vec{G} dl = \int \int_S \vec{r} \otimes G ds = \int \int_D \vec{r} \otimes G(\Phi(u, v)) \cdot (0, 0, 1) d(u, v) \\ &= \int \int_D \left(\frac{\partial F_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y} \right) d(x, y). \end{aligned}$$

A continuación se demuestra el Teorema de Stokes, para ello se va a suponer que la superficie S admite una parametrización explícita $z = f(x, y)$. Que son prácticamente todas las superficies que hemos tratado durante el tema.

Demostración. Teorema de Stokes

Supongamos que la superficie S está representada de forma explícita como $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in \bar{D}$ y con regularidad $\mathcal{C}^2(\bar{D})$. De esta forma la superficie estaría parametrizada como

$$S = \{\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \bar{D}\},$$

y $\partial^+ S := \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)))$, con $t \in [a, b]$.

Siendo $\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \partial^+ D$. Es decir, $\partial^+ S = \Phi(\partial^+ D)$.

Por otro lado, en cuanto al vector normal,

$$\vec{n}(x, y) = \vec{\Phi}_x \times \vec{\Phi}_y = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1).$$

Para la demostración del Teorema de Stokes, calculemos primero $\int_{\partial^+ S} \vec{F} dl$. Para ello, téngase en cuenta que

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

y

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), f_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + f_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t)).$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ S} \vec{F} dl &= \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t)), F_2(\gamma(t)), F_3(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), f_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) \\ &\quad + f_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t)) dt \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + F_3(\gamma(t)) [f_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) \\ &\quad + f_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t)]) dt \\ &= \int_a^b ([F_1(\gamma(t)) + F_3(\gamma(t))f_x(\gamma_1(t), \gamma_2(t))] \gamma_1'(t) \\ &\quad + [F_2(\gamma(t)) + F_3(\gamma(t))f_y(\gamma_1(t), \gamma_2(t))] \gamma_2'(t)) dt \\ &= \int_a^b \vec{G}(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t) dt \\ &= \int_{\Gamma} \vec{G} dl \end{aligned}$$

donde $\vec{G} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial definido como $\vec{G}(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$, siendo

$$G_1(x, y) = F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y))f_x(x, y),$$

$$G_2(x, y) = F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y))f_y(x, y).$$

De esta manera, aplicamos el Teorema de Green a la última integral para obtener

$$\begin{aligned} \int_{\partial+S} \vec{F} dl &= \int_{\Gamma} \vec{G} dl \\ &= \int \int_D \left(\frac{\partial G_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial G_1(x,y)}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Desarrollemos esta última integral, para ello se tiene en cuenta

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_2(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial F_2(x,y,f(x,y))}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x,y,f(x,y))}{\partial z} f_x(x,y) + \frac{\partial F_3(x,y,f(x,y))}{\partial x} f_y(x,y) \\ &\quad + \frac{\partial F_3(x,y,f(x,y))}{\partial z} f_x(x,y) f_y(x,y) + F_3(x,y,f(x,y)) f_{xy}(x,y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial F_1(x,y,f(x,y))}{\partial y} + \frac{\partial F_1(x,y,f(x,y))}{\partial z} f_y(x,y) + \frac{\partial F_3(x,y,f(x,y))}{\partial y} f_x(x,y) \\ &\quad + \frac{\partial F_3(x,y,f(x,y))}{\partial z} f_y(x,y) f_x(x,y) + F_3(x,y,f(x,y)) f_{yx}(x,y). \end{aligned}$$

Haciendo ahora su diferencia y teniendo en cuenta que $f_{xy} = f_{yx}$ se obtiene sustituyendo en (2.6)

$$\begin{aligned} \int \int_D \left(\frac{\partial G_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial G_1(x,y)}{\partial y} \right) d(x,y) &= \\ &= \int \int_D \left[\left(\frac{\partial F_2(x,y,f(x,y))}{\partial z} - \frac{\partial F_3(x,y,f(x,y))}{\partial y} \right) f_x(x,y) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F_3(x,y,f(x,y))}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y,f(x,y))}{\partial z} \right) f_y(x,y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_2(x,y,f(x,y))}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y,f(x,y))}{\partial y} \right] d(x,y) \\ &= \int \int_D \left[- \left(\frac{\partial F_3(\Phi(x,y))}{\partial y} - \frac{\partial F_2(\Phi(x,y))}{\partial z} \right) f_x(x,y) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial F_1(\Phi(x,y))}{\partial z} - \frac{\partial F_3(\Phi(x,y))}{\partial x} \right) f_y(x,y) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial F_2(\Phi(x,y))}{\partial x} - \frac{\partial F_1(\Phi(x,y))}{\partial y} \right) \right] d(x,y) \\ &= \int \int_D \vec{rot} F(\Phi(x,y)) \cdot (-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1) d(x,y) \\ &= \int \int_D \vec{rot} F(\Phi(x,y)) \cdot \vec{n}(x,y) d(x,y) = \int \int_S \vec{rot} F ds. \end{aligned}$$

■

2.3 Ejercicios resueltos

2.3.1 Área de superficie

Ejercicio 2.8 Considera el paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y el plano $z = y + \frac{1}{4}$. Calcula el área del plano limitado por la intersección. ■

Solución:

Nuestra figura se puede representar como:

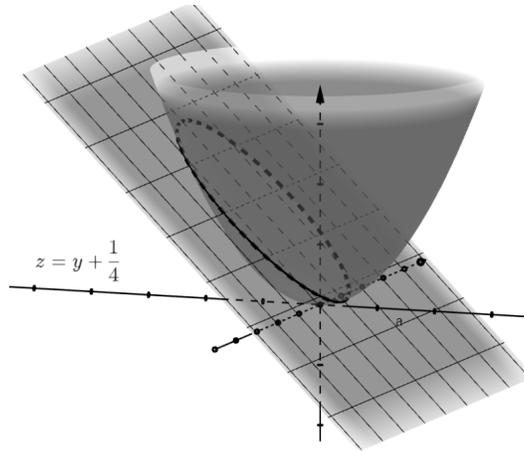


Figura 2.3.1: Ejercicio 2.8

Primero obtenemos la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = y + \frac{1}{4}$.

La intersección será $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la parametrización de nuestra superficie será $\phi(x, y) = (x, y, y + \frac{1}{4})$, con $(x, y) \in \bar{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}\}$.

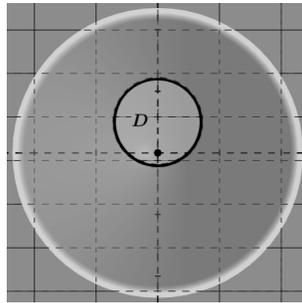


Figura 2.3.2: D . Ejercicio 2.8

El módulo del normal es $\|\vec{n}_\phi\| = \sqrt{2}$, entonces el área viene dada por la siguiente integral

$$\int \int_D \|\vec{n}_\phi\| d(x, y) = \int \int_D \sqrt{2} d(x, y).$$

Cambiando a polares, $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta) + \frac{1}{2}$, con ρ como el determinante del Jacobiano del cambio, tendríamos

$$\int \int_D \sqrt{2} d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{2} \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 2.9 Calcula el área de la superficie correspondiente a la porción del paraboloides $x^2 + y^2 = z$, que se encuentra entre $z = a^2$ y $z = b^2$ para $0 < a < b$. ■

Solución:

Estaríamos ante la siguiente situación:

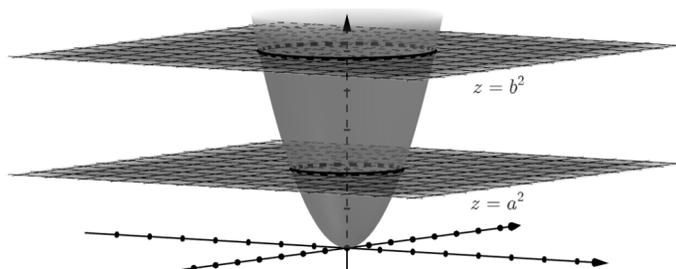


Figura 2.3.3: Ejercicio 2.9

La parametrización del paraboloides estaría dada por $\phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, con $(x, y) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$. Siendo el módulo del normal $\|\vec{n}_\phi\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$, la integral que debemos calcular será

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d(x, y),$$

donde \bar{D} estaría dada por $\bar{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$.

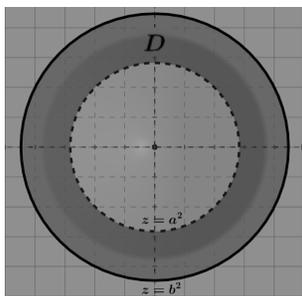


Figura 2.3.4: D . Ejercicio 2.9

Para calcular la integral usaremos coordenadas polares, $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$.

$$\iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_a^b (\sqrt{1 + 4\rho^2}) \rho d\rho d\theta = \frac{\pi \left((1 + 4b^2)^{\frac{3}{2}} - (1 + 4a^2)^{\frac{3}{2}} \right)}{6}.$$

Ejercicio 2.10 Calcula el área de la superficie correspondiente a un cuarto del cono $x^2 + y^2 = z^2$ entre $z = 1$ y $z = 3$. ■

Solución:

Podemos representar el cono como:

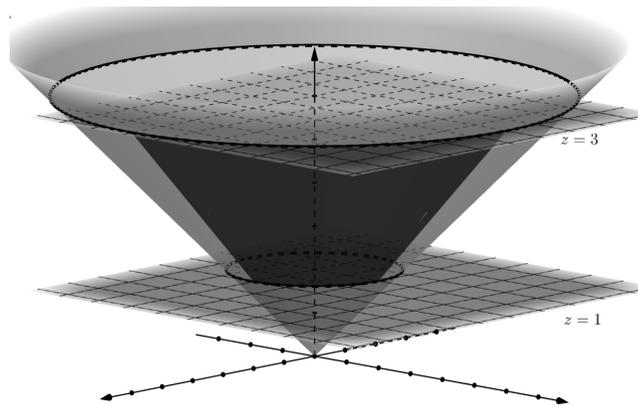


Figura 2.3.5: Ejercicio 2.10

La parametrización del cono sería $\phi(\theta, \rho) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \rho)$, con $(\theta, \rho) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$. En este caso, \bar{D} se puede describir como $\bar{D} = \{(\theta, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \rho \in [1, 3]\}$.

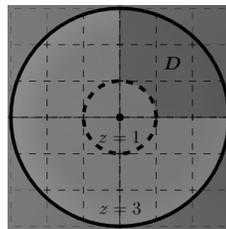


Figura 2.3.6: D . Ejercicio 2.10

Como el módulo del normal es $\|\vec{n}_\phi\| = \sqrt{2}\rho$, el área se calcularía con la siguiente integral

$$\int \int_D \sqrt{2}\rho d(\theta, \rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 \sqrt{2}\rho d\rho d\theta = 2^{\frac{3}{2}}\pi.$$

Ejercicio 2.11 Calcula el área de la parte del cono $2x^2 + 2y^2 = z^2$, que se encuentra entre $z = 0$ y $z = y + 1$. ■

Solución:

La figura se representaría como:

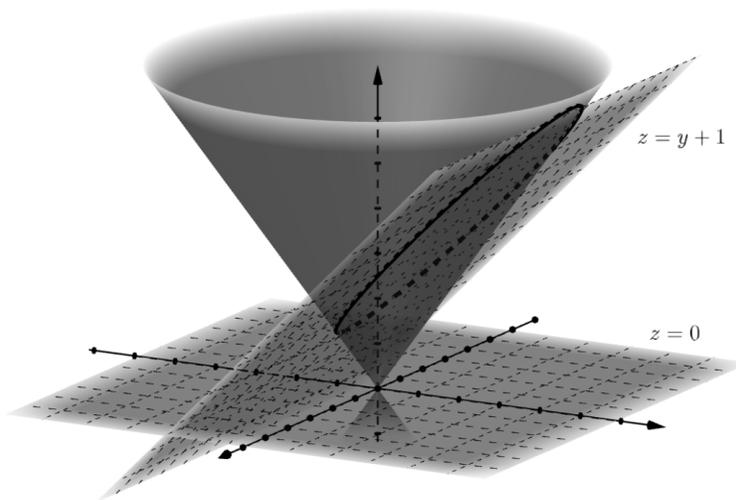


Figura 2.3.7: Ejercicio 2.11

Para calcular el área usaremos la parametrización del cono

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{2x^2 + 2y^2}),$$

con $(x, y) \in \bar{D}$. Ten en cuenta que al ser $z \geq 0$, la tercera coordenada es positiva.

Para conocer D tendríamos que observar la figura desde el plano XY y calcular la intersección del plano $z = y + 1$ y el cono.

La intersección sería $x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$, por lo tanto, $\bar{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1 \right\}$.

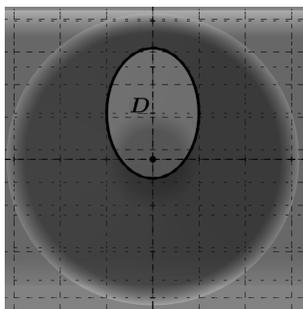


Figura 2.3.8: D . Ejercicio 2.11

Por otro lado, el módulo del vector normal será $\|\vec{n}_\phi\| = \sqrt{3}$, por lo que ya podemos calcular el área de la región correspondiente a la parte del cono que se nos pedía. Así,

$$\text{Área Cono} = \iint_D \sqrt{3} d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{6}\rho d\theta d\rho = \sqrt{6}\pi.$$

Donde hemos usado el cambio de coordenadas $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \sqrt{2}\rho \sin(\theta) + 1$, siendo el determinante del Jacobiano del cambio $\sqrt{2}\rho$, con $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 2.12 Calcula el área de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ encerrada por $z = 0$ y $z = 3y$ con $z \geq 0$. ■

Solución

El caso que nos ocupa sería:

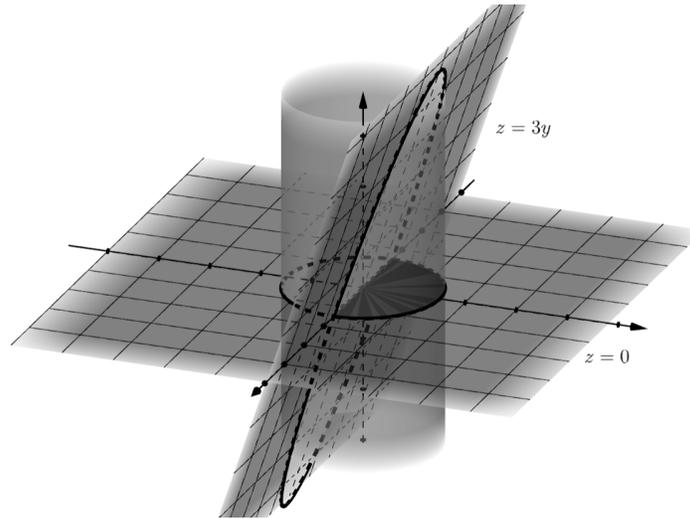


Figura 2.3.9: Ejercicio 2.12

La superficie del cilindro viene parametrizada por $\phi(\theta, z) = (3 \cos(\theta), 3 \sin(\theta), z)$, con $(\theta, z) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$. Por un lado, el normal sería $\vec{n}_\phi(\theta, z) = (3 \cos(\theta), 3 \sin(\theta), 0)$, así pues, el módulo del normal es $\|\vec{n}_\phi(\theta, z)\| = 3$.

Para observar el recinto D situémonos en el plano XY , donde tendríamos media circunferencia de radio 3, así, $\theta \in [0, \pi]$. En cuanto a z , sabemos que la altura irá de 0 a $3y$, por tanto, $z \in (0, 3y) = (0, 9 \sin(\theta))$.

El área será

$$\int \int_D \|\vec{n}_\phi(\theta, z)\| d(\theta, z) = \int_0^\pi \int_0^{9 \sin(\theta)} 3 dz d\theta = 54.$$

Ejercicio 2.13 Considera el cono de altura 4, por encima del plano XY , cuya base de radio 4 se encuentra también en este plano. Calcula el área de la superficie correspondiente a la porción del cono que se encuentra limitado por plano $2z - 5 = y$ y $z = 0$.

Solución:

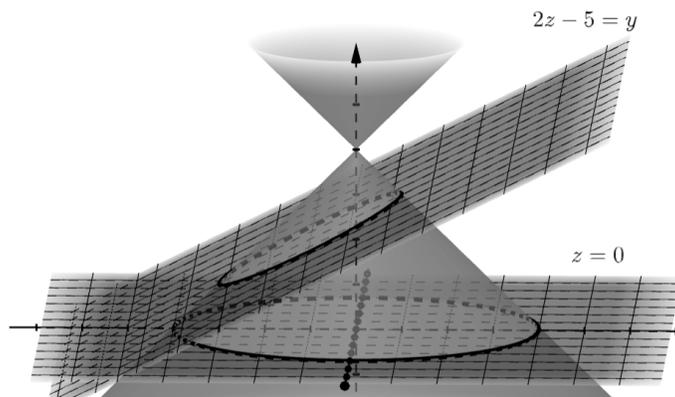


Figura 2.3.10: Ejercicio 2.13

El cono viene descrito por la ecuación $x^2 + y^2 = (4 - z)^2$.

Vamos a dividir la figura en dos, S_1 el cono desde su vértice hasta el plano $2z - 5 = y$ y S_2 el cono desde su vértice hasta el plano $z = 0$.

1. S_1

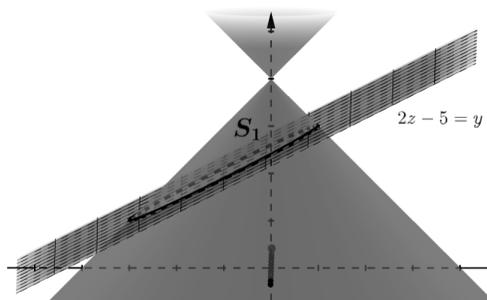
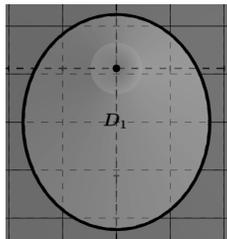


Figura 2.3.11: S_1

La parametrización de la superficie viene dada por $\phi_1(x, y) = (x, y, 4 - \sqrt{x^2 + y^2})$ con $(x, y) \in \overline{D_1}$, que sería la proyección en el plano XY de la figura. Para ver la forma de D_1 realizamos la intersección entre el plano $2z - 5 = y$ y el cono $x^2 + y^2 = (4 - z)^2$, igualando la z obtenemos la elipse

$$\frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Esta elipse indica el borde de D_1 , así, $\overline{D_1} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} \leq 1 \right\}$.

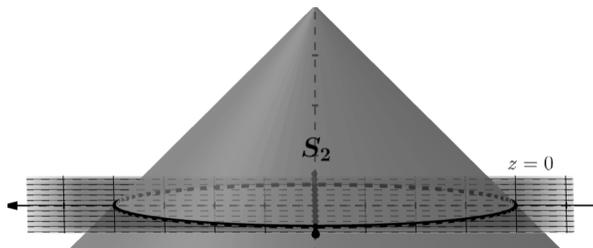
Figura 2.3.12: D_1

Calculamos ahora el área, siendo $\|\vec{n}_{\phi_1}\| = \sqrt{2}$, tenemos que

$$\iint_{D_1} \sqrt{2} d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2} (2\sqrt{3}\rho) d\rho d\theta = 2\sqrt{6}\pi.$$

Donde hemos usado el cambio de coordenadas $x = \sqrt{3}\rho \cos(\theta)$, $y = 2\rho \sin(\theta) - 1$.

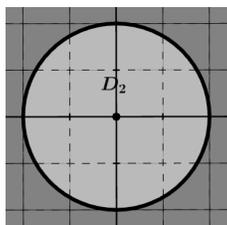
2. S_2

Figura 2.3.13: S_2

La parametrización de la superficie viene dada por $\phi_2(x, y) = (x, y, 4 - \sqrt{x^2 + y^2})$ con $(x, y) \in \overline{D_2}$. Al igual que antes, para conocer D_2 realizamos la intersección entre el plano $z = 0$ y el cono $x^2 + y^2 = (4 - z)^2$, igualando la z obtenemos el círculo

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

que indica el borde de D_2 , así, $\overline{D_2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4^2\}$.

Figura 2.3.14: D_2

Obteniendo el área a través de la siguiente integral, siendo $\|\vec{n}_{\phi_2}\| = \sqrt{2}$,

$$\iint_{D_2} \sqrt{2} d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \sqrt{2} \rho d\rho d\theta = 16\sqrt{2}\pi.$$

Donde hemos usado el cambio de coordenadas $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$.

El área de la figura pedida será la resta de ambas $16\sqrt{2}\pi - 2\sqrt{6}\pi$.

Ejercicio 2.14 Calcula el área de la superficie de la esfera correspondiente a una bola de radio 3, centrada en $(0,0,0)$, con un orificio de radio 2 en el hemisferio superior de la esfera. ■

Solución:

La figura sería la siguiente:

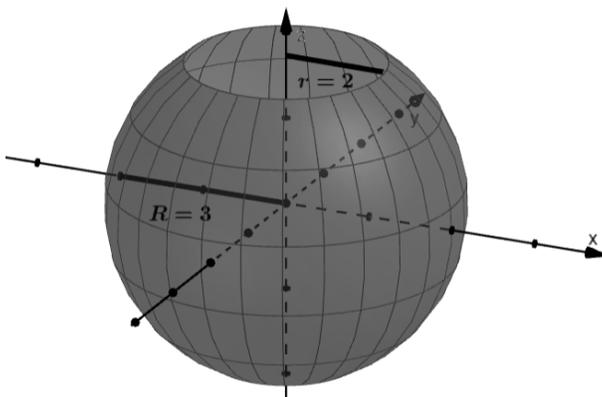


Figura 2.3.15: Ejercicio 2.14

La esfera estaría dada por $\phi(\theta, u) = (3 \cos(\theta) \sin(u), 3 \sin(\theta) \sin(u), 3 \cos(u))$, con $(\theta, u) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$. Siendo el módulo del normal $\|\vec{n}_\phi\| = 9 \sin(u)$, entonces la integral que debemos calcular es

$$\iint_D 9 \sin(u) d(\theta, u).$$

Por un lado, $\theta \in [0, 2\pi]$. Por otro lado, para ver donde se mueve u , consideremos la proyección en el plano XZ . Está claro que u terminaría en π y empezaría en el ángulo en el que interseca el orificio con la esfera.

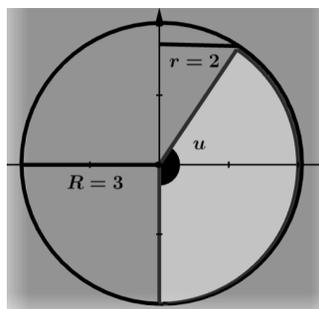


Figura 2.3.16: Proyección plano XZ

Obteniendo el punto de intersección, $x = 2$, $z = \sqrt{5}$. El ángulo d correspondiente a este punto, sería el que cumpliera que $3 \cos(d) = \sqrt{5}$ y $3 \sin(d) = 2$. Finalmente con

$$\bar{D} := \{(u, \theta) \in \mathbb{R}^2 : u \in [d, \pi], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

podemos calcular el área como

$$\iint_D 9 \sin(u) d(u, \theta) = 9 \int_0^{2\pi} \int_d^\pi \sin(u) du d\theta = 18\pi(\cos(d) + 1).$$

2.3.2 Integral de superficie

Ejercicio 2.15 Calcula la integral de flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, para una superficie S dada por el paraboloido $z = 4 - x^2 - y^2$, situado por encima del plano XY . ■

Solución

La superficie viene parametrizada por $\phi(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$, con $(x, y) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$. Para observar el recinto D situémonos en el plano XY , donde tendríamos una circunferencia de radio 2.

Teniendo que el vector normal sería $\vec{n}_\phi = (2x, 2y, 1)$, la integral de superficie vendrá dada por

$$\begin{aligned} \int \int_S \vec{F} ds &= \int \int_D \vec{F}(\phi(x, y)) \vec{n}_\phi d(x, y) = \int \int_D (x, y, 4 - x^2 - y^2) (2x, 2y, 1) d(x, y) = \\ &= \int \int_D (4 + x^2 + y^2) d(x, y). \end{aligned}$$

Cambiando a polares, $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, obtendríamos

$$\int \int_D (4 + x^2 + y^2) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 + \rho^2) \rho d\rho d\theta = 24\pi.$$

Ejercicio 2.16 Calcula la integral de superficie de la función $f(x, y, z) = \frac{\ln x}{x}$, siendo la superficie aquella parametrizada por $\phi(x, y) = (x, y, x \ln x - x + y)$, donde $(x, y) \in [2, 3] \times [0, 1]$. ■

Solución:

Tendríamos que calcular la siguiente integral

$$\int \int_S f ds = \int \int_D \|\vec{n}_\phi\| f(\phi(x, y)) d(x, y).$$

El módulo del normal estaría dado por $\|\vec{n}_\phi\| = \sqrt{2 + (\ln x)^2}$ y \bar{D} sería el recinto que nos indican, $\bar{D} = [2, 3] \times [0, 1]$, así,

$$\int \int_D \|\vec{n}_\phi\| f(\phi(x, y)) d(x, y) = \int_0^1 \int_2^3 \left(\sqrt{2 + (\ln x)^2} \right) \frac{\ln x}{x} dx dy = \frac{(2 + \ln^2(3))^{\frac{3}{2}} - (2 + \ln^2(2))^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

Ejercicio 2.17 Calcula la integral de superficie de una función escalar con respecto al cono $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ con $z \in [0, 4]$. La función escalar es proporcional a la distancia al eje Z . ■

Solución:

La función escalar, f , vendría dada por $kd((x, y, z), (0, 0, z)) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, donde $k \in \mathbb{R}$ y d es la distancia. Por lo que debemos calcular

$$\int \int_S f ds = \int \int_D k\sqrt{x^2 + y^2} \|\vec{n}_\phi\| d(x, y).$$

La superficie viene parametrizada por $\phi(x, y) = (x, y, 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2})$, con $(x, y) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$. Por un lado, si nos situamos en el plano XY , el recinto \bar{D} sería un círculo de radio 2. Por otro lado, el módulo del normal sería $\|\vec{n}_\phi\| = \sqrt{5}$.

Así pues, la integral de superficie vendría dada por

$$\iint_D \left(k\sqrt{x^2 + y^2} \right) \sqrt{5} d(x, y).$$

Cambiando a polares, $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, tendríamos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 k\sqrt{5}\rho^2 d\rho d\theta = \frac{16\sqrt{5}k\pi}{3}.$$

Ejercicio 2.18 Calcula la integral de la función $f(x, y, z) = z$ sobre la superficie S , dada por tres cuartos del toro $\phi(\theta, v) = ((R + r \cos(\theta)) \cos(v), (R + r \cos(\theta)) \sin(v), r \sin(\theta))$. ■

Solución:

La parametrización del toro estaría dada por

$$\phi(\theta, v) = ((R + r \cos(\theta)) \cos(v), (R + r \cos(\theta)) \sin(v), r \sin(\theta)),$$

con $(\theta, v) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$. Si calculamos el módulo del normal, obtenemos que $\|\vec{n}_\phi\| = r(R + r \cos(\theta))$ y si observamos la proyección de la superficie sobre el plano XY , tenemos que \bar{D} es

$$\bar{D} = \left\{ (v, \theta) \in \mathbb{R}^2 : v \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right], \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Así, la integral se calcularía como

$$\begin{aligned} \iint_S f ds &= \iint_D r \sin(\theta) r (R + r \cos(\theta)) d(\theta, v) = \\ &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r \sin(\theta) r (R + r \cos(\theta)) d\theta dv = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.19 Calcula la integral de superficie de $f(x, y, z) = x + z$, donde la superficie es la porción contenida en el primer octante del cilindro $y^2 + z^2 = 9$, entre $x = 0$ y $x = 4$. ■

Solución

Estaríamos en la siguiente situación:

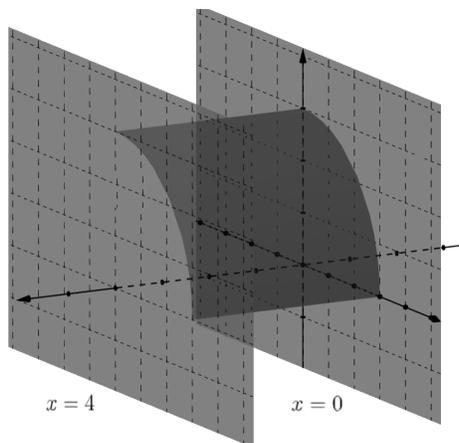


Figura 2.3.17: Ejercicio 2.19

La parametrización de la superficie será $\phi(x, \theta) = (x, 3 \cos(\theta), 3 \sin(\theta))$, con $(x, \theta) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$. Siendo $\bar{D} = [0, 4] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ y el módulo del normal $\|\vec{n}_\phi\| = 3$, la integral de superficie será

$$\int \int_S f ds = \int \int_D \|\vec{n}_\phi\| f(\phi(x, \theta)) d(x, \theta) = \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x + 9 \sin(\theta)) d\theta dx = 12\pi + 36.$$

Ejercicio 2.20 Teniendo en cuenta el paraboloides $x^2 + y^2 = z$, calcula la integral de la superficie del paraboloides que queda entre los planos $z = 1$ y $z = 4$, de $f(x, y, z) = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$. ■

Solución:

Tendríamos el siguiente supuesto:

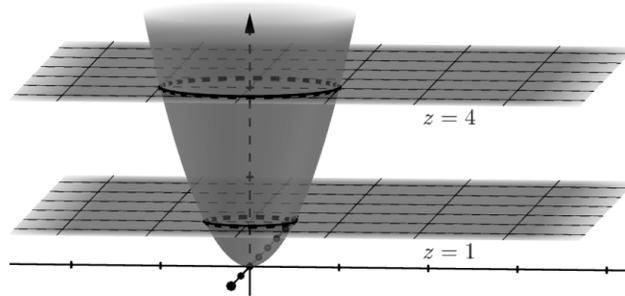


Figura 2.3.18: Ejercicio 2.20

La porción del paraboloides pedido estaría dado por

$$\phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

con $(x, y) \in \bar{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, pues para $z = 1$, el paraboloides traza una circunferencia de radio 1 y para $z = 4$, una circunferencia de radio 2, ambas centradas en $(0, 0)$.

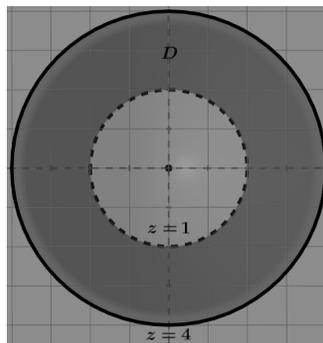


Figura 2.3.19: D. Ejercicio 2.20

Con el módulo del normal $\|\vec{n}_\phi\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$, se nos quedaría la integral de superficie como

$$\int \int_S f ds = \int \int_D f(\phi(x, y)) \|\vec{n}_\phi\| d(x, y) = \int \int_D (4x^2 + 4y^2 + 1) d(x, y).$$

Cambiando a polares, $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, tendríamos

$$\int \int_D (4x^2 + 4y^2 + 1) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 (4\rho^3 + \rho) d\rho d\theta = 33\pi.$$

Ejercicio 2.21 Considerando la función y el paraboloides anteriores, calcula la integral de superficie de la función para la porción del paraboloides que queda entre $0 \leq z \leq y$. ■

Solución:

Tenemos lo siguiente:

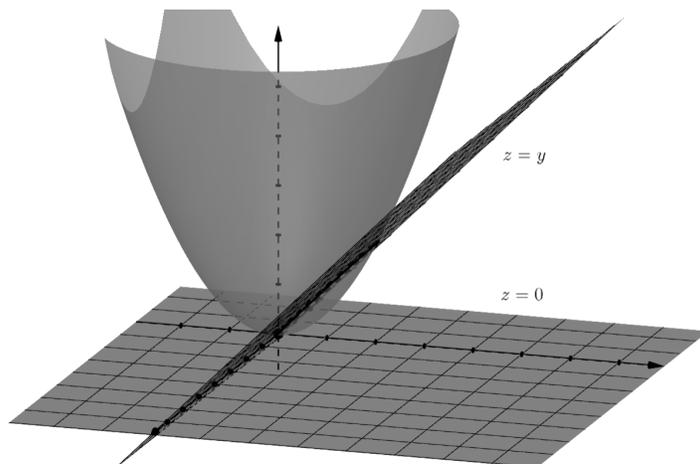


Figura 2.3.20: Ejercicio 2.21

La parametrización del paraboloides viene dada por:

$$\phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

con $(x, y) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$. Para ver el conjunto D podemos hacer la intersección del paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = y$, obteniendo $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, así, si proyectamos sobre el plano XY tendremos que $\bar{D} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \right\}$.

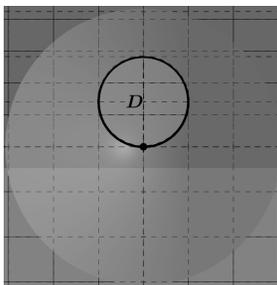


Figura 2.3.21: D . Ejercicio 2.21

Teniendo que $\|\vec{n}_\phi\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$,

$$\int \int_D f(\phi(x, y)) \|\vec{n}_\phi\| d(x, y) = \int \int_D (4x^2 + 4y^2 + 1) d(x, y).$$

Cambiando a polares, $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta) + \frac{1}{2}$, tenemos que

$$\int \int_D (4x^2 + 4y^2 + 1) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} (4\rho^3 + 4\rho^2 \sin(\theta) + 2\rho) d\rho d\theta = \frac{5\pi}{8}.$$

Ejercicio 2.22 Considera el paraboloido $x^2 + y^2 = 5 - z$, calcula la integral de la superficie correspondiente a la porción del paraboloido que se encuentra entre el plano $z = x + \frac{5}{2}$ y $z = 0$, para $f(x, y, z) = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$. ■

Solución: La figura se representaría como:

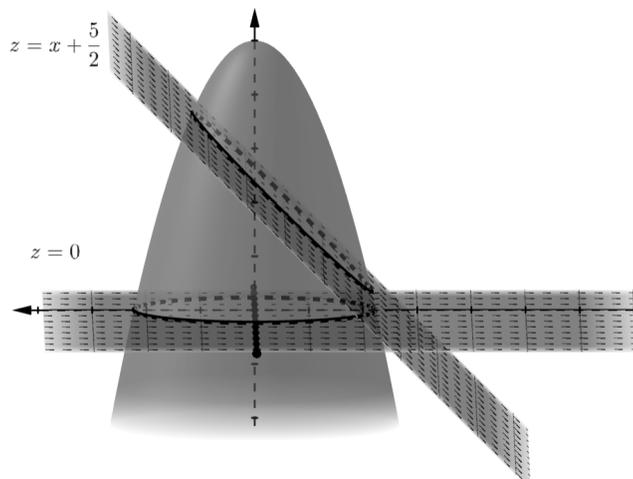


Figura 2.3.22: Ejercicio 2.22

Vamos a dividir la figura en dos, S_1 el paraboloido desde su cima hasta el plano $z = x + \frac{5}{2}$ y S_2 el paraboloido desde su cima hasta el plano $z = 0$.

1. S_1

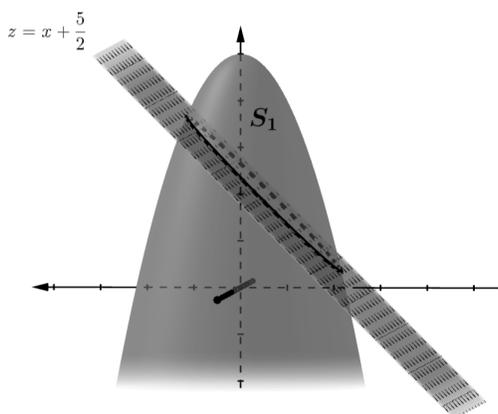


Figura 2.3.23: S_1

La parametrización de la superficie viene dada por $\phi_1(x, y) = (x, y, 5 - (x^2 + y^2))$ con $(x, y) \in \overline{D_1}$ que sería la proyección en el plano XY de la figura. Para ver la forma de D_1 realizamos la intersección entre el plano $z = x + \frac{5}{2}$ y el paraboloido $x^2 + y^2 = 5 - z$, igualando la z obtenemos

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{11}{4}.$$

Esta circunferencia indicaría el borde de D_1 , así, $\overline{D_1} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{11}{4}\}$.

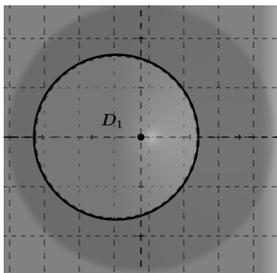


Figura 2.3.24: D_1

Calculamos ahora la integral de superficie, siendo $\|\vec{n}_{\phi_1}\| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$, tenemos que

$$\int \int_{S_1} f ds = \int \int_{D_1} (4(x^2 + y^2) + 1) d(x, y) =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{11}}{2}} \left[4 \left(\left(\rho \cos(\theta) - \frac{1}{2} \right)^2 + \rho^2 \sin^2(\theta) \right) + 1 \right] \rho d\rho d\theta = \frac{165\pi}{8}.$$

Donde hemos usado el cambio de coordenadas $x = \rho \cos(\theta) - \frac{1}{2}$, $y = \rho \sin(\theta)$.

2. S_2

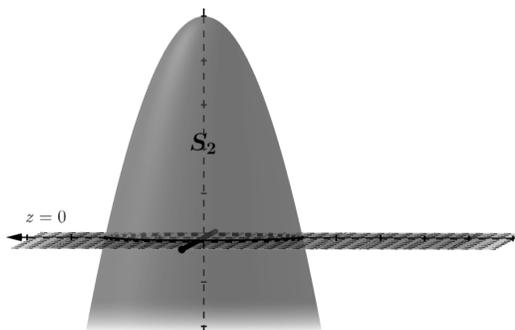


Figura 2.3.25: S_2

La parametrización de la superficie viene dada por $\phi_2(x, y) = (x, y, 5 - (x^2 + y^2))$ con $(x, y) \in \overline{D_2}$. Para tener D_2 realizamos la intersección entre el plano $z = 0$ y el paraboloides, obteniendo la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 5$$

que indica el borde de D_2 , así, $\overline{D_2} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$.

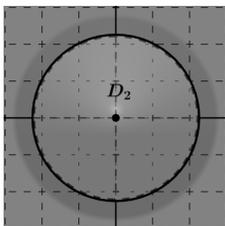


Figura 2.3.26: D_2

Entonces podemos calcular la integral de superficie, siendo $\|\vec{n}_{\phi_2}\| = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$, tenemos que

$$\int \int_{S_2} f \, ds = \int \int_{D_2} (4(x^2 + y^2) + 1) \, d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} (4\rho^3 + \rho) \, d\rho \, d\theta = 55\pi.$$

Donde hemos usado el cambio de coordenadas $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$.
La integral de superficie será la resta de ambas, $\frac{275\pi}{8}$.

2.3.3 Teorema de Stokes

Ejercicio 2.23 Comprueba el Teorema de Stokes con $\vec{F}(x, y, z) = (y, 2x, z^2)$ para la superficie del plano $z = 1$, limitada por la intersección con el elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. ■

Solución:

El elipsoide y el plano se pueden representar como:

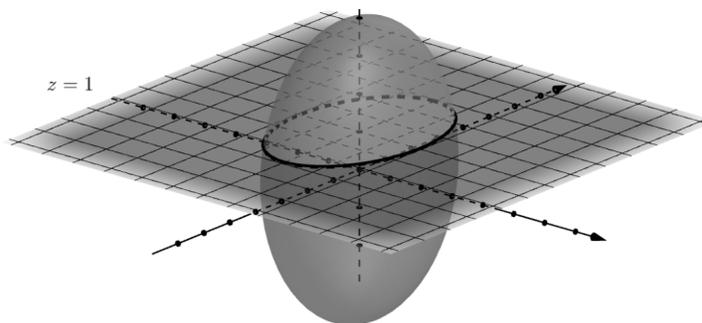


Figura 2.3.27: Ejercicio 2.23

La intersección entre el plano $z = 1$ y el elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ será $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = \frac{15}{16}$. Por lo tanto, la parametrización de nuestra superficie estará dada por $\phi(x, y) = (x, y, 1)$, donde se tiene que $(x, y) \in \bar{D} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq \frac{15}{16} \right\}$.

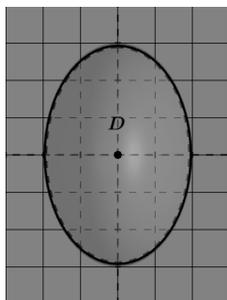


Figura 2.3.28: D . Ejercicio 2.23.

Por un lado, el vector normal sería $\vec{n}_\phi = (0, 0, 1)$ y el rotacional de nuestra función $\text{rot} F = (0, 0, 1)$.

Así, la integral de superficie es

$$\iint_S \text{rot} F \, ds = \iint_D \text{rot} F(\phi(x, y)) \vec{n}_\phi \, d(x, y) = \iint_D 1 \, d(x, y).$$

Cambiando a polares, $x = \frac{\sqrt{15}}{2} \rho \cos(\theta)$, $y = \frac{3\sqrt{15}}{4} \rho \sin(\theta)$, con el determinante del Jacobiano del cambio $\frac{45}{8} \rho$, tendríamos

$$\iint_D 1 \, d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{45}{8} \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{45}{8} \pi.$$

Por otro lado, $\partial^+ D = \gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \cos(t), \frac{3\sqrt{15}}{4} \sin(t) \right)$. Así,

$$\partial^+ S = \mu(t) = \phi(\gamma(t)) = \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \cos(t), \frac{3\sqrt{15}}{4} \sin(t), 1 \right), \text{ para } t \in [0, 2\pi],$$

teniendo que

$$\vec{F}(\mu) = \left(\frac{3\sqrt{15}}{4} \sin(t), \sqrt{15} \cos(t), 1 \right) \text{ y } \mu'(t) = \left(-\frac{\sqrt{15}}{2} \sin(t), \frac{3\sqrt{15}}{4} \cos(t), 0 \right).$$

Por lo tanto, la integral de línea del borde de S es

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} dl = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-45}{8} \sin^2(t) + \frac{45}{4} \cos^2(t) \right) dt = \frac{45}{8} \pi.$$

Ejercicio 2.24 Comprueba el Teorema de Stokes, con $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$, para el hemisferio superior de una esfera de radio uno centrada en $(0, 0, 0)$. ■

Solución:

La superficie esta parametrizada como

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

para $(x, y) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$, siendo \bar{D} una circunferencia de radio 1 centrada en $(0, 0)$. Por un lado, calcularemos la integral de superficie del rotacional, siendo este $\vec{rot} F = (0, 0, 0)$,

$$\int \int_S \vec{rot} F ds = 0.$$

Por otro lado, $\partial^+ D = \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Así, $\partial^+ S = \mu(t) = \phi(\gamma(t)) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, teniendo que $\vec{F}(\mu) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ y $\mu'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$. Por lo tanto, la integral de línea del borde de S es

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} dl = \int_0^{2\pi} (-\sin(t) \cos(t) + \cos(t) \sin(t)) dt = 0.$$

Ejercicio 2.25 Comprueba el Teorema de Stokes para un cono de altura 1 por encima del plano XY , cuya base de radio 1 está en el plano $z = 1$, siendo $\vec{F}(x, y, z) = (y, -xz, 2x + z)$. ■

Solución:

La superficie sería parametrizada como

$$\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$$

para $(x, y) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2$.

El rotacional es $\vec{rot}F = (x, -2, -z - 1)$, el normal, $\vec{n}_\phi = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right)$ y \bar{D} es un círculo de radio uno. Así, calculamos la integral de superficie del rotacional como

$$\int \int_S \vec{rot}F \, ds = \int \int_D \left(\frac{-x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right) d(x, y).$$

Cambiando a polares, $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, se nos queda la integral como

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (-\rho^2 \cos^2(\theta) + 2\rho \sin(\theta) - \rho^2 - \rho) \, d\rho d\theta = -2\pi.$$

Por otro lado, tenemos que $\partial^+ D = \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Como consecuencia, $\partial^+ S = \mu(t) = \phi(\gamma(t)) = (\cos(t), \sin(t), 1)$, $t \in [0, 2\pi]$, teniendo que $\vec{F}(\mu(t)) = (\sin(t), -\cos(t), 2\cos(t) + 1)$ y $\mu'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$. Así, la integral de línea del borde de S es

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} \, dl = \int_0^{2\pi} (-\sin^2(t) - \cos^2(t)) \, dt = -2\pi.$$

Ejercicio 2.26 Verifica el Teorema de Stokes para la superficie del ejercicio 2.15, con $\vec{F}(x, y, z) = (2z, x, y^2)$. ■

Solución:

Siendo el rotacional $\vec{rot}F = (2y, 2, 1)$, y el normal $\vec{n}_\phi = (2x, 2y, 1)$, la integral de superficie es

$$\int \int_S \vec{rot}F \, ds = \int \int_D (4xy + 4y + 1) \, d(x, y).$$

Como \bar{D} es un círculo de radio 2 centrado en $(0, 0)$, tenemos que

$$\int \int_D (4xy + 4y + 1) \, d(x, y) = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4xy + 4y + 1) \, dx dy = 4\pi.$$

Además, $\partial^+ D = \gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$. Así, llegamos a que $\partial^+ S = \mu(t) = \phi(\gamma(t)) = (2\cos(t), 2\sin(t), 0)$ y como consecuencia obtenemos que $\vec{F}(\mu) = (0, 2\cos(t), 4\sin^2(t))$ y $\mu'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), 0)$. Por lo tanto, la integral de línea del borde de S es

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} \, dl = \int_0^{2\pi} 4\cos^2(t) \, dt = 4\pi.$$

Quedando verificado el Teorema de Stokes.

Ejercicio 2.27 Considera el cono del ejercicio 2.11 y la intersección con el plano $z = y + 1$. Para $\vec{F}(x, y, z) = (y - z + 1, (z - y)x, (z - y)x)$, calcula, usando el Teorema de Stokes, la integral del rotacional de \vec{F} sobre la superficie S , siendo S la superficie del plano dado limitado por el cono. ■

Solución:

La superficie de intersección, S , entre el plano $z = y + 1$ y el cono, estará parametrizada por

$$\phi(x, y) = (x, y, y + 1) \text{ con } (x, y) \in \bar{D},$$

donde el borde del conjunto D , que ya ha sido calculado, es trazado por el camino

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sqrt{2}\sin(t) + 1) \text{ para } t \in [0, 2\pi].$$

Como tenemos que usar Stokes para esta superficie, tengamos en cuenta que

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} dl = \int \int_D \vec{rot}(F) ds.$$

Por lo tanto, tenemos que calcular la integral de línea del camino μ que traza el borde de la superficie, $\partial^+ S$.

Así pues, el borde μ será

$$\mu(t) = \phi(\gamma(t)) = (\cos(t), \sqrt{2}\sin(t) + 1, \sqrt{2}\sin(t) + 2)$$

con $t \in [0, 2\pi]$. La derivada será $\mu'(t) = (-\sin(t), \sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\cos(t))$. Siendo la integral de línea

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} dl = \int_0^{2\pi} (0, \cos(t), \cos(t))(-\sin(t), \sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\cos(t)) dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Ejercicio 2.28 Calcula la integral de línea de $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{1}{2}y^2, z, x)$, usando el Teorema de Stokes, para la superficie del plano $x + z = 1$ que se encuentra limitada por la intersección con el elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. ■

Solución:

Nos encontramos en la siguiente situación:

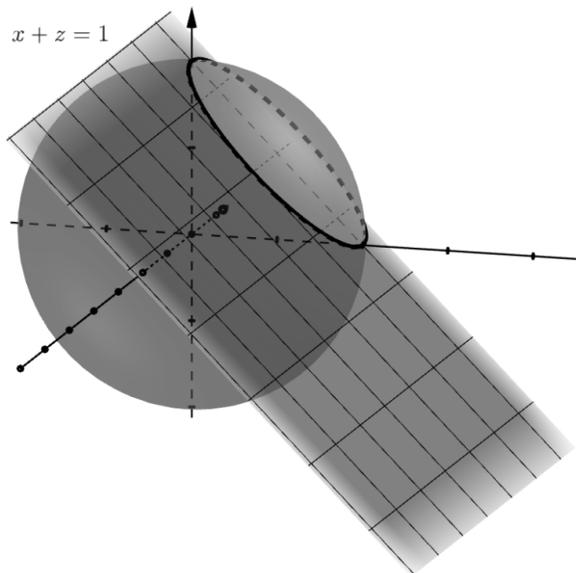


Figura 2.3.29: Ejercicio 2.28

Primero calculemos la intersección del elipsoide $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$, que será $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Por lo tanto, la parametrización de nuestra superficie será $\phi(x, y) = (x, y, 1 - x)$, con $(x, y) \in \bar{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$.

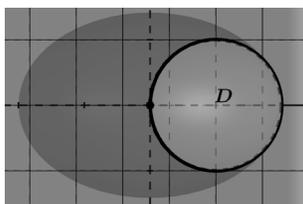


Figura 2.3.30: D. Ejercicio 2.28

Por un lado, el normal sería $\vec{n}_\phi = (1, 0, 1)$ y el rotacional de nuestra función $(-1, -1, -y)$. Así, la integral de superficie vendrá dada por

$$\int \int_D \text{rot} F(\phi(x, y)) \vec{n}_\phi d(x, y) = \int \int_D (-1 - y) d(x, y).$$

Cambiando a polares, $x = \rho \cos(\theta) + \frac{1}{2}$, $y = \rho \sin(\theta)$, tendríamos

$$\int \int_D (-1 - y) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} -(\rho + \rho^2 \sin(\theta)) d\rho d\theta = \frac{-\pi}{4}.$$

Ejercicio 2.29 Usa el Teorema de Stokes para calcular la integral sobre la superficie S del rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3ye^x + y, zx^2)$. Esta superficie S esta dada por la unión de un cilindro con base de radio 2, altura h , y su "tapa" superior, un círculo de radio 2, centrado en $(0, 0, h)$. ■

Solución:

Estariamos ante el siguiente caso:

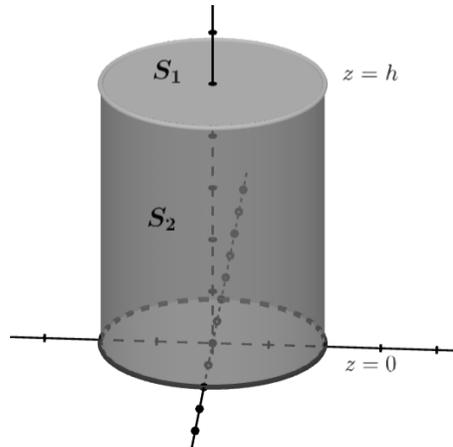


Figura 2.3.31: Ejercicio 2.29

Por el Teorema de Stokes, podemos obtener la integral de la superficie S como la suma de las integrales de línea que describen sus bordes.

$$\iint_S \vec{\text{rot}} F \, ds = \int_{\partial^+ S} \vec{F} \, dl = \int_{\partial^+ S_1} \vec{F} \, dl + \int_{\partial^+ S_2} \vec{F} \, dl.$$

1. S_1

Sea S_1 la "tapa" superior del cilindro, está dada por la parametrización $\phi_1(x, y) = (x, y, h)$ con $(x, y) \in \overline{D_1}$. En este caso $\overline{D_1}$ es un círculo de radio dos centrado en $(0, 0)$, por lo tanto, una curva que describa el borde de D_1 es $\gamma(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Así, el borde de S_1 será $\mu = \phi_1(\gamma) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), h)$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. S_2

Sea ahora S_2 el cilindro, su parametrización será $\phi_2(\theta, z) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), z)$ con $(\theta, z) \in \overline{D_2}$, donde $\overline{D_2}$ es un cuadrado de tamaño $[0, 2\pi] \times [0, h]$, por lo que su borde estará descrito con cuatro curvas.

- $\gamma_1(t) = (2\pi t, 0)$, $t \in [0, 1]$.
- $\gamma_2(t) = (2\pi, ht)$, $t \in [0, 1]$.
- $\gamma_3(t) = (2\pi - 2\pi t, h)$, $t \in [0, 1]$.
- $\gamma_4(t) = (0, h - ht)$, $t \in [0, 1]$.

De manera que los bordes de S_2 vienen descritos por

- $\phi_2(\gamma_1(t)) = \mu_1(t) = (2 \cos(2\pi t), 2 \sin(2\pi t), 0)$, $t \in [0, 1]$.
- $\phi_2(\gamma_2(t)) = \mu_2(t) = (2, 0, ht)$, $t \in [0, 1]$.
- $\phi_2(\gamma_3(t)) = \mu_3(t) = (2 \cos(2\pi - 2\pi t), 2 \sin(2\pi - 2\pi t), h)$, $t \in [0, 1]$.
- $\phi_2(\gamma_4(t)) = \mu_4(t) = (2, 0, h - ht)$, $t \in [0, 1]$.

Así, podemos ver que $\mu_2 = \mu_4^{-1}$ y $\mu_3 = \mu^{-1}$, por lo tanto,

$$\int_{\partial^+ S_1} \vec{F} dl + \int_{\partial^+ S_2} \vec{F} dl = \int_{\mu} \vec{F} dl + \int_{\mu_1} \vec{F} dl + \int_{\mu_2} \vec{F} dl + \int_{\mu_3} \vec{F} dl + \int_{\mu_4} \vec{F} dl = \int_{\mu_1} \vec{F} dl.$$

Siendo $\mu'_1(t) = (-4\pi \sin(2\pi t), 4\pi \cos(2\pi t), 0)$ y $\vec{F}(\mu_1) = (2 \cos(2\pi t), 2 \sin(2\pi t), 0)$, tenemos que

$$\int_{\mu_1} \vec{F} dl = \int_0^1 (-8\pi \sin(2\pi t) \cos(2\pi t) + 8\pi \sin(2\pi t) \cos(2\pi t)) dt = 0.$$

Por lo que,

$$\int \int_S \vec{rot} F ds = 0.$$

3. Teorema de Gauss

3.1 Operador divergencia

Antes de enunciar el Teorema de Gauss (o de la divergencia), se define el operador divergencia y se establecen algunas de sus propiedades más importantes.

Definición 3.1.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $\vec{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ campo vectorial $\mathcal{C}^1(A)$. Entonces se define la divergencia de $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

■ **Ejemplo 3.1**

1. Sea $\vec{F} = (\cos(xy), e^{-x}yz, z^4)$, entonces $\operatorname{div} \vec{F} = -y \sin(xy) + e^{-x}z + 4z^3$.
2. Sea $\vec{F} = (2zx^3y, -3zx^2y^2, -2)$, entonces $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.

■ **Observación 3.1.1**

1. De la misma manera se puede definir la divergencia en dimensión N como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial F_k}{\partial x_k},$$

siendo $\vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_N(x))$ con $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

2. El operador divergencia convierte campos vectoriales en campos escalares.
3. Se puede considerar el operador divergencia como la traza de la matriz jacobiana.
4. A menudo se suele escribir

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}.$$

5. En el siguiente enlace: [khanacademy](#), puede consultarse la interpretación geométrica del operador divergencia.

Lema 3.1.2 — Propiedades de la divergencia. Sean \vec{F} y \vec{G} campos vectoriales con regularidad \mathcal{C}^2 . Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

- i) $\operatorname{div}(\lambda\vec{F} + \mu\vec{G}) = \lambda\operatorname{div}\vec{F} + \mu\operatorname{div}\vec{G}$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- ii) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f\operatorname{div}\vec{F}$, para todo f campo escalar.
- iii) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{rot}F \cdot \vec{G} - \operatorname{rot}G \cdot \vec{F}$.
- iv) $\operatorname{div}\operatorname{rot}F = 0$.
- v) $\Delta f := \operatorname{div}\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, para todo f campo escalar \mathcal{C}^2 .

Ejercicio 3.1 Demuestra las propiedades anteriores.

Sol.

Consideremos $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$.

i) $\operatorname{div}(\lambda\vec{F} + \mu\vec{G}) = \lambda\operatorname{div}\vec{F} + \mu\operatorname{div}\vec{G}$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda\vec{F} + \mu\vec{G}) &= \frac{\partial(\lambda F_1 + \mu G_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda F_2 + \mu G_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda F_3 + \mu G_3)}{\partial z} \\ &= \left(\lambda \frac{\partial F_1}{\partial x} + \mu \frac{\partial G_1}{\partial x} \right) + \left(\lambda \frac{\partial F_2}{\partial y} + \mu \frac{\partial G_2}{\partial y} \right) + \left(\lambda \frac{\partial F_3}{\partial z} + \mu \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) \\ &= \lambda \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y} + \frac{\partial G_3}{\partial z} \right) \\ &= \lambda \operatorname{div}\vec{F} + \mu \operatorname{div}\vec{G}. \end{aligned}$$

ii) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f\operatorname{div}\vec{F}$, para todo f campo escalar.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\vec{F}) &= \frac{\partial f F_1}{\partial x} + \frac{\partial f F_2}{\partial y} + \frac{\partial f F_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} F_1 + f \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} F_2 + f \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} F_3 + f \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} F_1 + \frac{\partial f}{\partial y} F_2 + \frac{\partial f}{\partial z} F_3 + f \frac{\partial F_1}{\partial x} + f \frac{\partial F_2}{\partial y} + f \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div}\vec{F}. \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{rot} F \cdot \vec{G} - \vec{rot} G \cdot \vec{F}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \operatorname{div}(F_2G_3 - G_2F_3, F_3G_1 - F_1G_3, F_1G_2 - G_1F_2) \\ &= \frac{\partial F_2G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_2F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_3G_1}{\partial y} - \frac{\partial G_3F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1G_2}{\partial z} - \frac{\partial G_1F_2}{\partial z} \\ &= G_3 \frac{\partial F_2}{\partial x} + F_2 \frac{\partial G_3}{\partial x} - \left(F_3 \frac{\partial G_2}{\partial x} + G_2 \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \\ &\quad + G_1 \frac{\partial F_3}{\partial y} + F_3 \frac{\partial G_1}{\partial y} - \left(G_3 \frac{\partial F_1}{\partial y} + F_1 \frac{\partial G_3}{\partial y} \right) \\ &\quad + G_2 \frac{\partial F_1}{\partial z} + F_1 \frac{\partial G_2}{\partial z} - \left(F_2 \frac{\partial G_1}{\partial z} + G_1 \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \\ &= G_1 \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + G_2 \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \\ &\quad + G_3 \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) - F_1 \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z} \right) \\ &\quad - F_2 \left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x} \right) - F_3 \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot \vec{G} \\ &\quad - \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}, \frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}, \frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) \cdot \vec{F} \\ &= \vec{rot} F \cdot \vec{G} - \vec{rot} G \cdot \vec{F}. \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \operatorname{div} \vec{rot} F = 0.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{rot} F &= \operatorname{div} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donde en la última igualdad hemos usado el Teorema de Schwartz para $F \in \mathcal{C}^2$.

$$\text{v) } \Delta f := \operatorname{div} \vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \text{ para todo } f \text{ campo escalar } \mathcal{C}^2.$$

$$\begin{aligned} \Delta f &:= \operatorname{div} \vec{\nabla} f = \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

3.2 Teorema de Gauss

Teorema 3.2.1 — Gauss o Divergencia. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado y $\vec{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1(V)$. Sea la superficie cerrada $S = \partial V$ (frontera del abierto V), suave (a trozos) y orientada por el vector normal exterior. Entonces,

$$\int \int_S \vec{F} \, ds = \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, d(x, y, z).$$

Observación 3.2.2 El Teorema de Gauss relaciona una integral de flujo en una superficie cerrada (no tiene borde) con una integral triple del interior de la superficie.

Para su demostración enunciamos previamente una versión de la regla de Barrow:

Proposición 3.2.3 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f'(x) \, dx = f(b) - f(a).$$

Demostración. **Teorema de Gauss**

Demostrar el Teorema de Gauss para un paralelepípedo rectangular probará de hecho el resultado para cualquier superficie, debido a la naturaleza de las sumas de Riemann de la integral triple.

Así pues, sea V un paralelepípedo rectangular, esto es

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_1 < x < x_2; y_1 < y < y_2; z_1 < z < z_2\}$$

y por tanto, $\partial V := S = \cup_{k=1}^6 S_k$, siendo S_k las seis caras del paralelepípedo con orientación el vector normal exterior con la siguiente parametrización:

- Cara delantera $S_1 : \Phi_1(y, z) = (x_2, y, z); y \in [y_1, y_2]; z \in [z_1, z_2]$ con vector normal exterior $\vec{n}_1(y, z) = (1, 0, 0)$.
- Cara trasera $S_2 : \Phi_2(y, z) = (x_1, y, z); y \in [y_1, y_2]; z \in [z_1, z_2]$ con vector normal exterior $\vec{n}_2(y, z) = (-1, 0, 0)$.
- Cara lateral izquierda $S_3 : \Phi_3(x, z) = (x, y_1, z); x \in [x_1, x_2]; z \in [z_1, z_2]$ con vector normal exterior $\vec{n}_3(x, z) = (0, -1, 0)$.
- Cara lateral derecha $S_4 : \Phi_4(x, z) = (x, y_2, z); x \in [x_1, x_2]; z \in [z_1, z_2]$ con vector normal exterior $\vec{n}_4(x, z) = (0, 1, 0)$.
- Cara tapa inferior $S_5 : \Phi_5(x, y) = (x, y, z_1); x \in [x_1, x_2]; y \in [y_1, y_2]$ con vector normal exterior $\vec{n}_5(x, y) = (0, 0, -1)$.
- Cara tapa superior $S_6 : \Phi_6(x, y) = (x, y, z_2); x \in [x_1, x_2]; y \in [y_1, y_2]$ con vector normal exterior $\vec{n}_6(x, y) = (0, 0, 1)$.

Por otro lado, definimos el campo vectorial como:

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

De esta forma, calculamos primeramente la integral de superficie

$$\int \int_S \vec{F} \, ds = \sum_{k=1}^6 \int \int_{S_k} \vec{F} \, ds.$$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \int \int_{S_1} \vec{F} \, ds + \int \int_{S_2} \vec{F} \, ds \\
&= \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} \vec{F}(x_2, y, z)(1, 0, 0) \, dzdy + \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} \vec{F}(x_1, y, z)(-1, 0, 0) \, dzdy \\
&= \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} F_1(x_2, y, z) \, dzdy - \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} F_1(x_1, y, z) \, dzdy \\
&= \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} (F_1(x_2, y, z) - F_1(x_1, y, z)) \, dzdy
\end{aligned}$$

y por la Proposición (3.2.3)

$$= \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} \int_{x=x_1}^{x_2} \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} \, dx dzdy = \int \int \int_V \frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} \, d(x, y, z).$$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \int \int_{S_3} \vec{F} \, ds + \int \int_{S_4} \vec{F} \, ds \\
&= \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{z=z_1}^{z_2} \vec{F}(x, y_1, z)(0, -1, 0) \, dzdx + \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{z=z_1}^{z_2} \vec{F}(x, y_2, z)(0, 1, 0) \, dzdx \\
&= - \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{z=z_1}^{z_2} F_2(x, y_1, z) \, dzdx + \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{z=z_1}^{z_2} F_2(x, y_2, z) \, dzdx \\
&= \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{z=z_1}^{z_2} (F_2(x, y_2, z) - F_2(x, y_1, z)) \, dzdx
\end{aligned}$$

y por la Proposición (3.2.3)

$$= \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{z=z_1}^{z_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial y} \, dy dzdx = \int \int \int_V \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial y} \, d(x, y, z).$$

$$\begin{aligned}
& \blacksquare \int \int_{S_5} \vec{F} \, ds + \int \int_{S_6} \vec{F} \, ds \\
&= \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \vec{F}(x, y, z_1)(0, 0, -1) \, dydx + \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \vec{F}(x, y, z_2)(0, 0, 1) \, dydx \\
&= - \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} F_3(x, y, z_1) \, dydx + \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} F_3(x, y, z_2) \, dydx \\
&= \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} (F_3(x, y, z_2) - F_3(x, y, z_1)) \, dydx
\end{aligned}$$

y por la Proposición (3.2.3)

$$= \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z} \, dz dydx = \int \int \int_V \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z} \, d(x, y, z).$$

De esta forma, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \int_S \vec{F} \, ds &= \int \int \int_V \left(\frac{\partial F_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x, y, z)}{\partial z} \right) \, d(x, y, z) \\
&= \int \int \int_V \operatorname{div} F \, d(x, y, z).
\end{aligned}$$

■

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del Teorema de Gauss,

Corolario 3.2.4 Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado del espacio y $\vec{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial $\mathcal{C}^1(V)$ tal que $\operatorname{div} \vec{F} = 1$. Sea la superficie cerrada $S = \partial V$ (frontera del volumen V), suave (a trozos) y orientada por el vector normal exterior. Entonces,

$$\text{Volumen}(V) = \int \int_S \vec{F} \, ds.$$

Ejercicio 3.2 Usa el corolario anterior para calcular el volumen de una bola de radio R y un cono de radio R y altura h . ■

Ejercicio 3.3 Comprueba el Teorema de Gauss en los siguientes casos:

1. $\vec{F} = (x, y, z - 2)$ y el abierto V dado por la intersección

$$\{x^2 + y^2 + (z - 2)^2 < 16\} \cap \{2 < z < 6\}.$$

(Sol. 128π).

2. $\vec{F} = (4x, -2y, z)$ y el volumen comprendido entre el paraboloido $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$. (Sol. 24π). ■

Obsérvese que el Teorema de Gauss nos permite calcular de forma más sencilla integrales de superficie cerradas que en un principio pueden parecer bastante complicadas de realizar. Para ello véase el siguiente ejercicio:

Ejercicio 3.4 Usando el Teorema de Gauss, calcula las siguientes integrales de flujo $\iint_S \vec{F} \, ds$:

1. $\vec{F} = (xy, y^2 + e^{xz}, \sin(xy))$ siendo S la superficie cerrada compuesta por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$; $y = 0$; $y + z = 2$. Considerando en S el vector normal exterior. (Sol. $184/35$).
2. $\vec{F} = (2x^2, 3x + y, 5z)$ siendo S la superficie cerrada delimitada por la esfera centrada en el origen y de radio 1, y los planos $z = 0$; $x = 0$; $y = x$, en el primer octante. Considerando en S el vector normal exterior. (Sol. $\frac{\pi}{8}(6 - \sqrt{2})$).
3. $\vec{F} = (xz + \cos(y), yz + \cos(z), xy + \cos(x))$ siendo S la superficie cerrada de intersección la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$ ($z \geq 0$). (Sol. $3\pi/4$). ■

Teorema 3.2.5 — Ley de Gauss. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de \mathbb{R}^3 tal que $(0, 0, 0) \notin \partial V$, siendo ∂V una superficie suave, simple y orientada por el vector normal exterior. Sea el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(r) = \frac{r}{\|r\|^3}, \quad r = (x, y, z).$$

Entonces,

$$\int \int_{\partial V} \vec{F} \, ds = \begin{cases} 0, & \text{si } (0, 0, 0) \notin V, \\ 4\pi, & \text{si } (0, 0, 0) \in V. \end{cases}$$

Demostración.

- Si $(0,0,0) \notin V$: En este caso $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(V)$. Así pues, estamos en las hipótesis del Teorema de Gauss y obtenemos:

$$\int \int_{\partial V} \vec{F} ds = \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z) = \int \int \int_V 0 d(x,y,z) = 0,$$

donde se ha usado que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \operatorname{div} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \right) \\ &= \frac{-2x^2+y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Si $(0,0,0) \in V$: En este caso no podemos usar el Teorema de Gauss ya que \vec{F} no es continua en el origen. Consideramos entonces $B_\varepsilon(0,0,0)$ la bola de centro el $(0,0,0)$ con radio ε suficientemente pequeño para asegurar que $B_\varepsilon(0,0,0) \subset V$. Sea,

$$W = V \setminus \overline{B_\varepsilon(0,0,0)}.$$

Observamos que la superficie ∂W orientada por el vector normal exterior es $\partial W = \partial V \cup \partial B_\varepsilon(0,0,0)$, siendo ∂V orientado por el vector normal exterior y $\partial B_\varepsilon(0,0,0)$ orientado por el vector normal interior. Además, como

$$\int \int_{\partial W} \vec{F} ds = \int \int_{\partial V} \vec{F} ds + \int \int_{\partial B_\varepsilon(0,0,0)} \vec{F} ds$$

y $(0,0,0) \notin W$, se tiene que (por el primer caso) $\int \int_{\partial W} \vec{F} ds = 0$. Por tanto,

$$\int \int_{\partial V} \vec{F} ds = - \int \int_{\partial B_\varepsilon(0,0,0)} \vec{F} ds.$$

Calculamos la segunda integral de superficie:

$$\begin{aligned}
 - \int \int_{\partial B_\varepsilon(0,0,0)} \vec{F} ds &= - \int_{u=0}^{\pi} \int_{v=0}^{2\pi} F(\Phi(u, v)) \cdot \vec{n}_{int}(u, v) dv du \\
 &= - \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varepsilon \sin u \cos v}{(\sqrt{\varepsilon^2})^3}, \frac{\varepsilon \sin u \sin v}{(\sqrt{\varepsilon^2})^3}, \frac{\varepsilon \cos u}{(\sqrt{\varepsilon^2})^3} \right) \cdot \\
 &\quad (-\varepsilon^2 \sin^2 u \cos v, -\varepsilon^2 \sin^2 u \sin v, -\varepsilon^2 \cos u \sin u) dv du \\
 &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^3 u \cos^2 v + \sin^3 u \sin^2 v + \cos^2 u \sin u) dv du \\
 &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^3 u + \cos^2 u \sin u) dv du \\
 &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin u dv du \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin u du \\
 &= 4\pi.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int \int_{\partial V} \vec{F} ds = - \int \int_{\partial B_\varepsilon(0,0,0)} \vec{F} ds = 4\pi.$$

■

Ejercicio 3.5 Usando la Ley de Gauss demuestra que, si \vec{E} es el campo eléctrico creado por una carga Q , entonces el flujo creado por dicha carga es

$$\int \int_{\partial V} \vec{E} ds = \begin{cases} 0, & \text{si } (0,0,0) \notin V, \\ \frac{Q}{\varepsilon_0}, & \text{si } (0,0,0) \in V, \end{cases}$$

siendo ε_0 la constante de permitividad del vacío. ■

3.3 Ejercicios resueltos

3.3.1 Comprobar el Teorema de Gauss

Ejercicio 3.6 Verifica el Teorema de la Divergencia para $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ en una bola de radio c y de centro $(1,2,1)$. ■

Solución:

Nos encontraríamos con el siguiente caso:

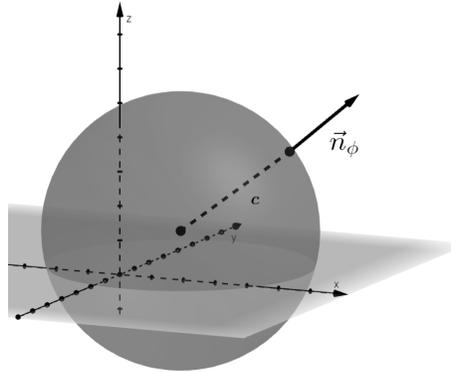


Figura 3.3.1: Ejercicio 3.6

$$\int \int_S \vec{F} ds = \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z).$$

Donde V es la bola, S la frontera de la bola, es decir la esfera, y \vec{n}_V es el vector normal exterior a la frontera de V .

La esfera, S , vendría parametrizada por

$$\phi(\theta, u) = (c \cos(\theta) \sin(u) + 1, c \sin(\theta) \sin(u) + 2, c \cos(u) + 1), \text{ con } (\theta, u) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

Para calcular el vector normal a esta superficie obtenemos primero los vectores tangentes:

$$\phi_\theta = (-c \sin(\theta) \sin(u), c \cos(\theta) \sin(u), 0).$$

$$\phi_u = (c \cos(\theta) \cos(u), c \sin(\theta) \cos(u), -c \sin(u)).$$

Así, el vector exterior normal será

$$\vec{n}_\phi = \phi_u \times \phi_\theta = c^2 (\cos(\theta) \sin^2(u), \sin(\theta) \sin^2(u), \sin(u) \cos(u)).$$

Además, como $\vec{F}(\phi) = (c \cos(\theta) \sin(u) + 1, c \sin(\theta) \sin(u) + 2, c \cos(u) + 1)$, tenemos que

$$\int \int_S \vec{F} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (c^3 \sin(u) + c^2 \sin(u) [\sin(u) (\cos(\theta) + 2 \sin(\theta)) + \cos(u)]) du d\theta = 4\pi c^3.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z) = 3 \int \int \int_V 1 d(x,y,z) = 3 \operatorname{Volumen}(V) = 3 \left(\frac{4}{3} \pi c^3 \right) = 4\pi c^3.$$

Como consecuencia, se verifica el Teorema de la Divergencia.

Ejercicio 3.7 Considera V como la parte de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ que se encuentra acotada por el primer octante. Para $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$ comprueba el Teorema de la Divergencia. ■

Solución:

Tenemos el siguiente volumen:

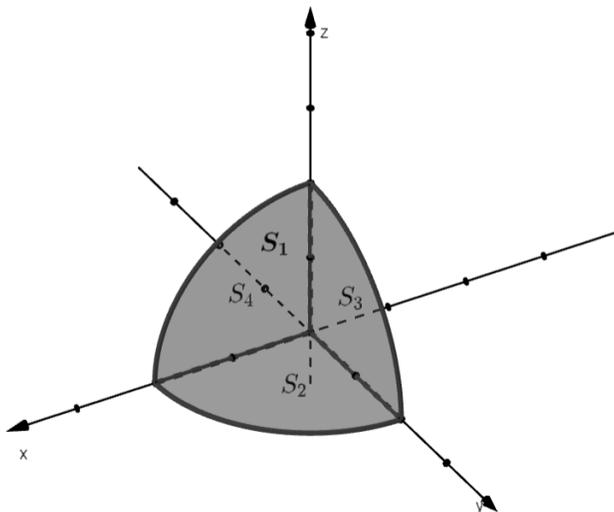


Figura 3.3.2: Ejercicio 3.7

Según el Teorema de la Divergencia tenemos que

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \iint_S \vec{F} ds.$$

Donde V es el sólido encerrado por una porción de la esfera $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y los planos $S_2 : z = 0$; $S_3 : x = 0$ y $S_4 : y = 0$. Por un lado,

$$\iint_S \vec{F} ds = \iint_{S_1} \vec{F} ds + \iint_{S_2} \vec{F} ds + \iint_{S_3} \vec{F} ds + \iint_{S_4} \vec{F} ds.$$

1. $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

La parte de la esfera vendrá parametrizada por

$$\phi_1(\theta, u) = (a \cos(\theta) \sin(u), a \sin(\theta) \sin(u), a \cos(u))$$

con $(\theta, u) \in \bar{D}_1$, donde $\bar{D}_1 := \{(\theta, u) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]; u \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. Teniendo que $\vec{F}(\phi_1) = (a \cos(\theta) \sin(u), a \sin(\theta) \sin(u), 0)$ y el vector normal exterior,

$$\vec{n}_{\phi_1} = \phi_{1u} \times \phi_{1\theta} = a^2 (\cos(\theta) \sin^2(u), \sin(\theta) \sin^2(u), \sin(u) \cos(u)),$$

la integral quedaría como

$$\iint_{S_1} \vec{F} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^3(u) d\theta du = \frac{\pi a^3}{3}.$$

2. $S_2 : z = 0$

En la intersección entre el plano $z = 0$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, nos encontraríamos con un cuarto de círculo parametrizado por $\phi_2(x, y) = (x, y, 0)$ con $(x, y) \in \bar{D}_2$, donde $\bar{D}_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0; y \geq 0; x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Además, $\vec{F}(\phi_2) = (x, y, 0)$ y el vector normal exterior será $\vec{n}_{\phi_2} = (0, 0, -1)$, por lo tanto, tenemos que

$$\int \int_{S_2} \vec{F} ds = 0.$$

3. $S_3 : x = 0$

La intersección entre el plano $x = 0$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ esta parametrizada por $\phi_3(y, z) = (0, y, z)$ con $(y, z) \in \bar{D}_3$, donde $\bar{D}_3 := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0; z \geq 0; y^2 + z^2 \leq a^2\}$. También se tiene que $\vec{F}(\phi_3) = (0, y, 0)$ y el vector normal exterior es $\vec{n}_{\phi_3} = (-1, 0, 0)$, por lo tanto, tenemos que

$$\int \int_{S_3} \vec{F} ds = 0.$$

4. $S_4 : y = 0$

En la intersección entre el plano $y = 0$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, nos ocurriría lo mismo, $\phi_4(x, z) = (x, 0, z)$ con $(x, z) \in \bar{D}_4$, donde $\bar{D}_4 := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0; z \geq 0; x^2 + z^2 \leq a^2\}$, $\vec{F}(\phi_4) = (x, 0, 0)$ y el normal $\vec{n}_{\phi_4} = (0, -1, 0)$, así,

$$\int \int_{S_4} \vec{F} ds = 0.$$

Finalmente,

$$\int \int_S \vec{F} ds = \int \int_{S_1} \vec{F} ds + \int \int_{S_2} \vec{F} ds + \int \int_{S_3} \vec{F} ds + \int \int_{S_4} \vec{F} ds = \frac{\pi a^3}{3}.$$

Por otro lado, podemos calcular la integral triple de $\text{div} \vec{F} = 2$ con coordenadas esféricas, $x = \rho \cos(\theta) \sin(u)$, $y = \rho \sin(\theta) \sin(u)$, $z = \rho \cos(u)$, donde $\rho \in [0, a]$, $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\int \int \int_V \text{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\rho^2 \sin(u) du d\theta d\rho = \frac{\pi a^3}{3}.$$

De forma que se verifica el Teorema de la Divergencia.

Ejercicio 3.8 Comprueba el Teorema de la Divergencia para $\vec{F}(x,y,z) = (4x, -2y, z)$ en un volumen V , comprendido entre un paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $z \in [0, 4]$ y su "tapa" superior, el círculo en $z = 4$. ■

Solución:

Estaríamos ante la siguiente situación:

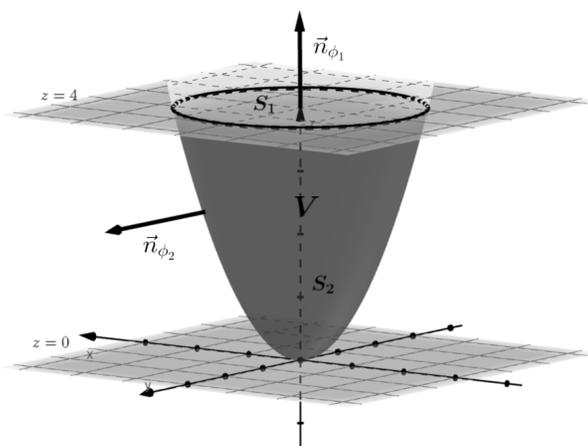


Figura 3.3.3: Ejercicio 3.8

Tenemos que verificar que

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z) = \iint_S \vec{F} ds.$$

Donde V es el sólido encerrado por el círculo S_1 y el paraboloide S_2 . Calculemos

$$\iint_S \vec{F} ds = \iint_{S_1} \vec{F} ds + \iint_{S_2} \vec{F} ds$$

1. S_1

El círculo vendrá dado por la parametrización $\phi_1(x,y) = (x,y,4)$ con $(x,y) \in \bar{D}_1$, donde $\bar{D}_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Además, $\vec{F}(\phi_1) = (4x, -2y, 4)$ y el vector normal exterior será $\vec{n}_{\phi_1} = (0, 0, 1)$, por tanto, usando coordenadas polares tenemos que

$$\iint_{S_1} \vec{F} ds = \iint_{D_1} 4 d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 4\rho d\rho d\theta = 16\pi.$$

2. S_2

El paraboloide está parametrizado por $\phi_2(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$ con $(x,y) \in \bar{D}_2$, donde $\bar{D}_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Como $\vec{F}(\phi_2) = (4x, -2y, x^2+y^2)$ y el vector normal exterior es $\vec{n}_{\phi_2} = (2x, 2y, -1)$, por tanto, usando coordenadas polares tenemos que

$$\iint_{S_2} \vec{F} ds = \iint_{D_2} (7x^2 - 5y^2) d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (7\rho^2 \cos^2 \theta - 5\rho^2 \sin^2 \theta) \rho d\rho d\theta = 8\pi.$$

Así, tenemos que

$$\iint_S \vec{F} ds = \iint_{S_1} \vec{F} ds + \iint_{S_2} \vec{F} ds = 24\pi.$$

Por otro lado, calculemos

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z).$$

En este caso $\operatorname{div} \vec{F} = 3$, entonces sustituyendo $x = \rho \cos(\theta)$ y $y = \rho \sin(\theta)$ para $\rho \in [0,2)$, $\theta \in (0,2\pi)$,

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z) = \iint_{D_2} \int_{x^2+y^2}^4 3 dz d(x,y) = 3 \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2}^4 \rho dz d\theta d\rho = 24\pi.$$

Por tanto, se verifica el Teorema de la Divergencia.

Ejercicio 3.9 Sea V la región sólida comprendida entre el plano XY y el paraboloides $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z = c$, con $c > 0$. Comprueba el Teorema de la Divergencia para $\vec{F}(x,y,z) = (-z, x, 3y)$.

Solución:

El sólido V se puede esbozar como la siguiente imagen:

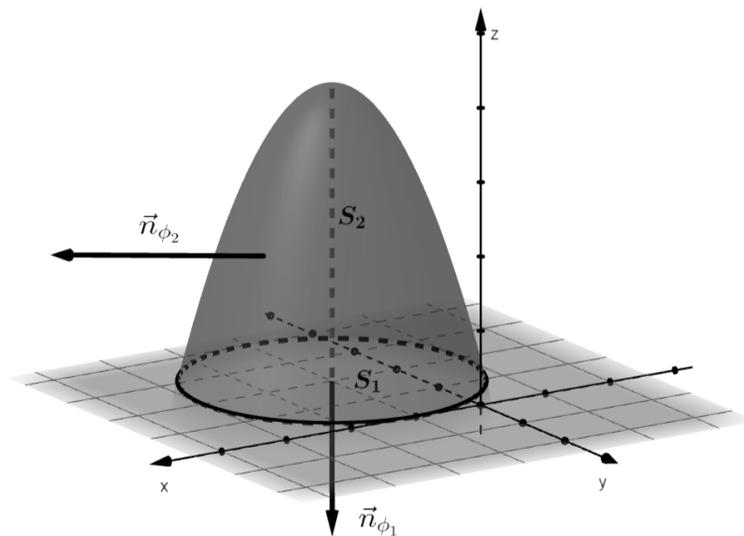


Figura 3.3.4: Ejercicio 3.9

Se debe cumplir que

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z) = \iint_S \vec{F} ds.$$

Donde V es el sólido encerrado por el círculo S_1 y el paraboloides S_2 . Por un lado,

$$\iint_S \vec{F} ds = \iint_{S_1} \vec{F} ds + \iint_{S_2} \vec{F} ds$$

1. S_1

El círculo, que formaría la base del paraboloides en el plano XY , vendrá dado por $\phi_1(x, y) = (x, y, 0)$ con $(x, y) \in \bar{D}_1$, donde $\bar{D}_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq c\}$. Siendo $\vec{F}(\phi_1) = (0, x, 3y)$ y el vector normal exterior $\vec{n}_{\phi_1} = (0, 0, -1)$, por tanto, usando las coordenadas $x = \rho \cos(\theta) + 1$, $y = \rho \sin(\theta) - 2$ tenemos que

$$\int \int_{S_1} \vec{F} ds = \int \int_{D_1} -3y d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{c}} -3\rho(\rho \sin(\theta) - 2) d\rho d\theta = 6\pi c.$$

2. S_2

El paraboloides será parametrizado por $\phi_2(x, y) = (x, y, c - (x-1)^2 - (y+2)^2)$ con $(x, y) \in \bar{D}_2$, donde $\bar{D}_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq c\}$. Además, $\vec{F}(\phi_2) = ((x-1)^2 + (y+2)^2 - c, x, 3y)$ y el vector normal exterior será $\vec{n}_{\phi_2} = (2(x-1), 2(y+2), 1)$, ahora, considerando $x = \rho \cos(\theta) + 1$, $y = \rho \sin(\theta) - 2$, tenemos que

$$\int \int_{S_2} \vec{F} ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{c}} (2\rho \cos \theta (\rho^2 - c) + 2\rho \sin \theta (\rho \cos \theta + 1) + 3\rho \sin \theta - 6) \rho d\rho d\theta = -6\pi c.$$

Así, tenemos que

$$\int \int_S \vec{F} ds = \int \int_{S_1} \vec{F} ds + \int \int_{S_2} \vec{F} ds = 0\pi.$$

Por otro lado, como $\operatorname{div} \vec{F} = 0$,

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = 0.$$

De forma que se verifica el Teorema de la Divergencia.

3.3.2 Integral de superficie. Teorema de Gauss

Ejercicio 3.10 Considera el volumen V comprendido entre el cilindro $x^2 + z^2 = 4$ y los planos $z = 0$; $x = 0$; $y = -1$ y $y = 1$, considera también $\vec{F}(x, y, z) = (2xz, 3x^2 + 3z^2y, 4xy^2)$. Usa el Teorema de la Divergencia para calcular la integral de la superficie $S = \partial V$ para el campo \vec{F} . ■

Solución:

Nos encontramos ante el caso:

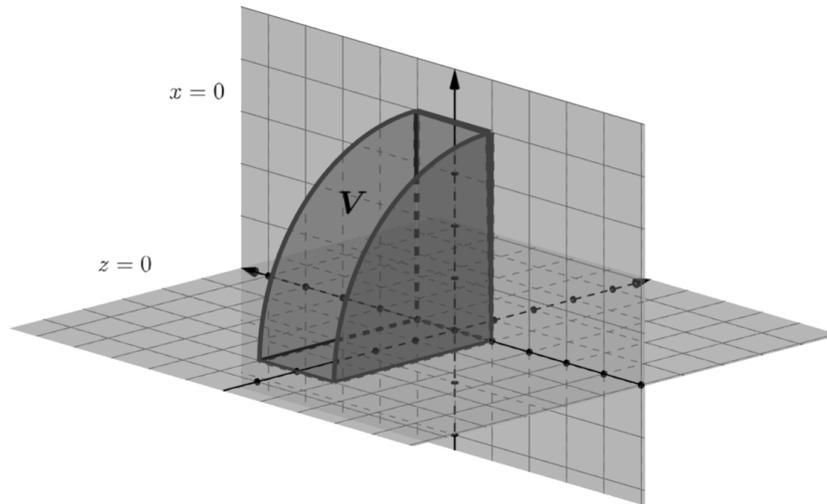


Figura 3.3.5: Ejercicio 3.10

Gracias al Teorema de la Divergencia sabemos que

$$\int \int_S \vec{F} \, ds = \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, d(x, y, z).$$

Por un lado, $\operatorname{div} \vec{F} = 2z + 3z^2$ y V se puede describir como $(\rho \cos(\theta), y, \rho \sin(\theta))$ con $\rho \in (0, 2)$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, $y \in (-1, 1)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, d(x, y, z) &= \int \int \int_V (2z + 3z^2) \, d(x, y, z) = \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\rho \sin \theta + 3\rho^2 \sin^2 \theta) \rho \, d\theta \, d\rho \, dy = \frac{32}{3} + 6\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.11 Considera el volumen V formado por el plano $-x + 2y + z = 3$, en el segundo octante, considera también $\vec{F}(x, y, z) = (\ln(y^2 + 1) + x^2, zy, 4z)$. Usa el Teorema de la Divergencia para calcular la integral de la superficie $S = \partial V$ para el campo \vec{F} . ■

Solución:

El volumen descrito sería el siguiente:

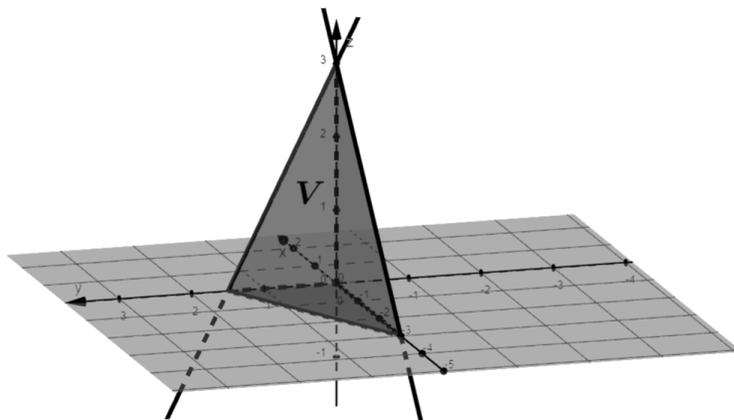


Figura 3.3.6: Ejercicio 3.11

Por el Teorema de la Divergencia tenemos que

$$\iint_S \vec{F} \, ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, d(x, y, z).$$

Donde $\operatorname{div} \vec{F} = 2x + z + 4$. Si observamos las caras del volumen podemos conocer el valor de sus coordenadas x, y, z .

Para saber entre que valores se mueve la coordenada x podemos observar el plano XZ .

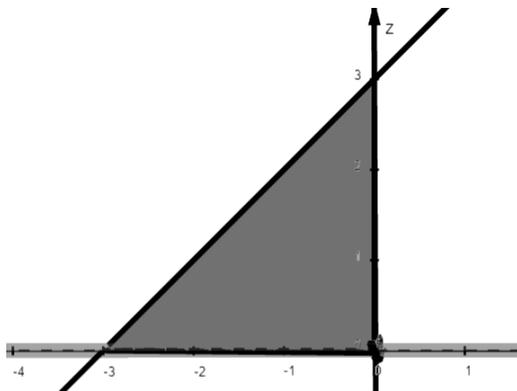


Figura 3.3.7: Proyección XZ . Ejercicio 3.11

Así, $x \in (-3, 0)$, $z \in (0, 3 + x)$. Por otro lado, $y \in (0, \frac{3-z+x}{2})$, por tanto,

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} = \int_{-3}^0 \int_0^{3+x} \int_0^{\frac{3-z+x}{2}} (2x + z + 4) \, dy \, dz \, dx = \frac{117}{16}.$$

Ejercicio 3.12 Considera el sólido V encerrado por el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ y los planos $z = 2$ y $z = 4$. Calcula la integral de superficie del borde del sólido para $\vec{F}(x, y, z) = (e^{xy}, zx + y, x^3)$. ■

Solución:

El sólido podría ser esbozado como:

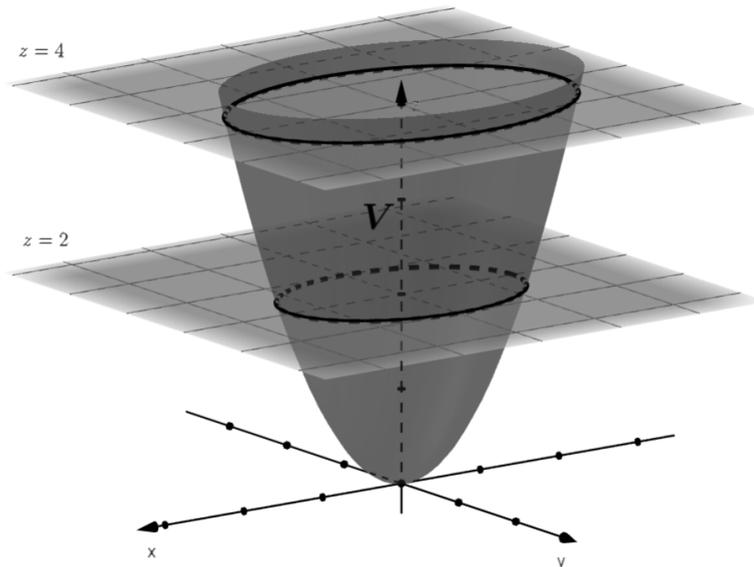


Figura 3.3.8: Ejercicio 3.12

Podemos usar el Teorema de la Divergencia para obtener la integral de superficie:

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int_S \vec{F} ds.$$

Por un lado, $\operatorname{div} \vec{F} = 1$, y $z \in (2, 4)$. Nos falta ver dónde se mueven las coordenadas x, y . Si proyectamos sobre el plano XY , se encontrarán dentro de la elipse que se obtiene a partir del paraboloide $z = x^2 + 2y^2$, es decir, en

$$\bar{D} := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\}.$$

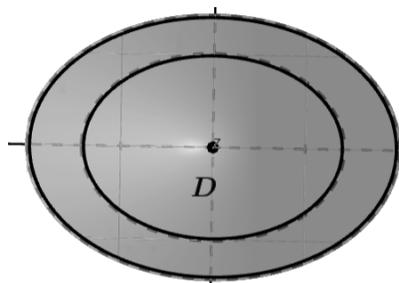


Figura 3.3.9: Proyección XY . Ejercicio 3.12

Por tanto, podemos expresar la integral triple como

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int \int_V 1 d(x, y, z) = \int_2^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z/2}} \sqrt{2} \rho d\rho d\theta dz = 3\sqrt{2}\pi.$$

Donde en el último paso hemos usado las coordenadas elípticas $x = \sqrt{2}\rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$. Teniendo finalmente que

$$\int \int_S \vec{F} ds = 3\sqrt{2}\pi.$$

Ejercicio 3.13 Usa el Teorema de la Divergencia para calcular la integral doble de la superficie dada por la frontera del elipsoide $\frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + z^2 = 1$ para $\vec{F}(x, y, z) = (2x^3 + 2z^2, 3y^3, x^2 + z^3)$.

Solución:

Gracias al Teorema de la Divergencia tenemos que

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int_S \vec{F} ds.$$

Por lo tanto, podemos calcular

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z).$$

Se tiene que $\operatorname{div} \vec{F} = 6x^2 + 9y^2 + 3z^2$. Por lo que la integral, mediante el cambio de coordenadas, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho \cos(\theta) \sin(u)$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho \sin(\theta) \sin(u)$, $z = \rho \cos(u)$, quedaría

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) &= \\ \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho^4 \sin^3(u) + \rho^4 \cos^2(u) \sin(u)) dud\theta d\rho &= \frac{2\sqrt{6}\pi}{5}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.14 Sea \vec{F} tal que $\vec{rot}F$ cumple el Teorema de la Divergencia, y V el sólido encerrado por el cono $2x^2 + 2y^2 = z^2$, y el plano $z = y + 1$. Obtén la relación entre las integral de superficie del cono y del plano, para $\vec{rot}F$, usando el Teorema de la Divergencia.

Solución:

Una $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ cuyo rotacional cumple el Teorema de la Divergencia, nos aseguraría que

$$\int \int \int_V \operatorname{div}(\vec{rot}F) d(x, y, z) = \int \int_S \vec{rot}F ds.$$

Donde V es el sólido encerrado por el plano $z = y + 1$ y la parte del cono desde $z = 0$ hasta $z = y + 1$, siendo S la superficie unión de ambas, entonces

$$\int \int \int_V \operatorname{div}(\vec{rot}F) d(x, y, z) = \int \int_{S_{\text{Cono}}} \vec{rot}F ds + \int \int_{S_{\text{Plano}}} \vec{rot}F ds.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{F})) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}, \end{aligned}$$

como $F \in \mathcal{C}^2(V)$, por el Teorema de Schwartz, la divergencia del rotacional será 0. Por lo tanto,

$$\int \int_{S_{\text{Cono}}} \vec{\operatorname{rot}} F ds = - \int \int_{S_{\text{Plano}}} \vec{\operatorname{rot}} F ds.$$

Ejercicio 3.15 Considera V el volumen acotado por los planos $2x + 3z = 8$; $z = 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 5$, calcula la integral de superficie del borde de V para $\vec{F}(x, y, z) = (e^z, xy + 2z, 3 \cos y - z)$.

Solución:

Nos encontraríamos con la siguiente figura:

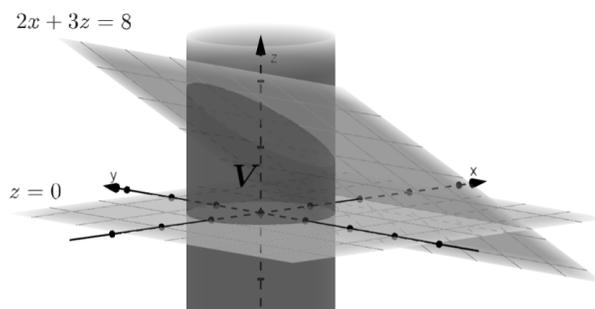


Figura 3.3.10: Ejercicio 3.15

Podemos usar el Teorema de la Divergencia teniendo que

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int_S \vec{F} ds.$$

En este caso $\operatorname{div} \vec{F} = x - 1$. La coordenada z se encontrará entre 0 y $\frac{8-2x}{3}$. Para averiguar entre qué valores se encuentran las coordenadas (x, y) , consideremos D la proyección en el plano XY del volumen. Ésta sería $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 5\}$, por tanto,

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int_D \int_0^{\frac{8-2x}{3}} (x-1) dz d(x, y).$$

Usando coordenadas polares tenemos que

$$\int \int_D \int_0^{\frac{8-2x}{3}} (x-1) dz d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{\frac{8-2\rho \cos(\theta)}{3}} (\rho \cos(\theta) - 1) \rho dz d\rho d\theta = \frac{-35}{2} \pi.$$

Por lo tanto, gracias al teorema de la Divergencia tenemos que

$$\int \int_S \vec{F} ds = \frac{-35}{2} \pi.$$

Ejercicio 3.16 Sea $\vec{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, 2z)$ calcula la integral de flujo de la superficie del borde del sólido V dado por la figura comprendida entre el cilindro $x^2 + y^2 = 2$, y los planos $z = 0$, $\frac{y}{2} + z = 4$. ■

Solución:

Un esbozo de la figura sería:

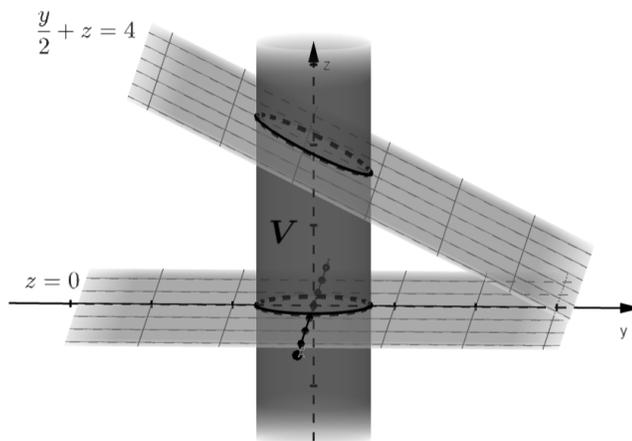


Figura 3.3.11: Ejercicio 3.16

Para realizar el ejercicio usaremos el Teorema de la Divergencia

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int_S \vec{F} ds.$$

Como $\operatorname{div} \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 2$,

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int_D \int_0^{4-\frac{y}{2}} (3x^2 + 3y^2 + 2) dz d(x, y).$$

Donde $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 2\}$, entonces, usando coordenadas polares, $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$,

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) &= \int \int_D \int_0^{4-\frac{y}{2}} (3x^2 + 3y^2 + 2) dz d(x, y) \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{4-\frac{\rho \sin(\theta)}{2}} (3\rho^2 + 2) \rho dz d\theta d\rho = 40\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.17 Calcula la integral de S , una superficie cerrada que es el borde de la región limitada por el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, con $a > 3$ en el octante que cumple que $x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0$, entre los planos $x = 0$ y $y = -3x$, para $\vec{F}(x, y, z) = (x + yz, \sin(z)x^3, e^y)$. ■

Solución:

Un esbozo del problema sería el siguiente:

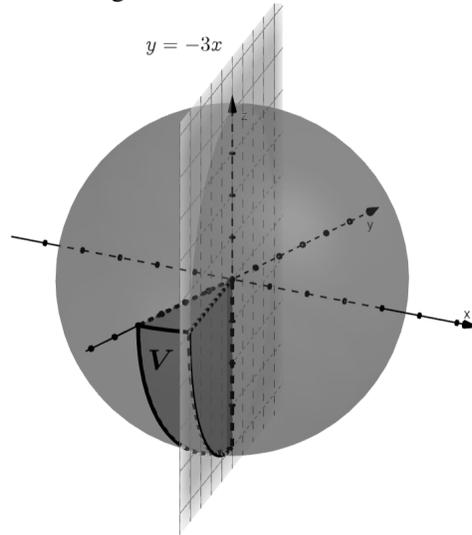


Figura 3.3.12: Ejercicio 3.17

Usamos el teorema de la Divergencia con V la región del enunciado encerrada por S ,

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \iint_S \vec{F} ds.$$

Como V es una parte de la bola abierta de radio a , usaremos coordenadas esféricas $x = \rho \cos(\theta) \sin(u)$, $y = \rho \sin(\theta) \sin(u)$, $z = \rho \cos(u)$.

Está claro que $\rho \in [0, a)$, por otro lado, al trabajar solo con la parte negativa de z , $u \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Para ver qué ocurre con la última coordenada θ , consideramos la proyección en el plano XY de la figura. Así, la recta $y = -3x$ y la proyección de la esfera, $x^2 + y^2 = a^2$, intersecan en $(\frac{a}{\sqrt{10}}, -3\frac{a}{\sqrt{10}})$.

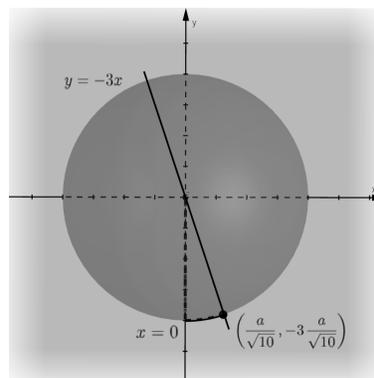


Figura 3.3.13: Proyección XY . Ejercicio 3.17

Por tanto, θ empieza en $\frac{3\pi}{2}$ y acaba en un ángulo d desconocido, donde ocurre la intersección de la circunferencia y la recta $y = -3x$.

Considerando la parametrización de la circunferencia de radio a , $\gamma(t) = (a \cos(t), a \sin(t))$, para el ángulo $t = d$ se tiene que $\cos(d) = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin(d) = \frac{-3}{\sqrt{10}}$. Así, $\theta \in (\frac{3\pi}{2}, d)$.

Podemos ya calcular el resultado

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int \int_V 1 d(x, y, z) =$$

$$\int_0^a \int_{\frac{3\pi}{2}}^d \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \rho^2 \sin(u) du d\theta d\rho = \left(d - \frac{3\pi}{2}\right) \frac{a^3}{3}.$$

Donde hemos realizado el cambio a coordenadas esféricas.

Ejercicio 3.18 Considera $\vec{F}(x, y, z) = (2x, y, 4x^2)$ y el volumen V dado por la región interior del paraboloido $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = \frac{z}{c}$, cerrado por el elipsoide $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 + (\frac{z}{c})^2 = 1$. Usa el Teorema de la Divergencia para calcular la integral doble de \vec{F} en la superficie del borde de V . ■

Solución:

Estamos ante el siguiente volumen V :

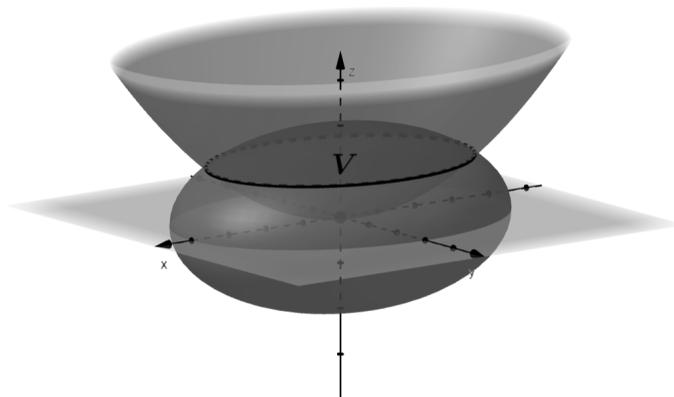


Figura 3.3.14: Ejercicio 3.18

Usando el Teorema de la Divergencia tenemos que

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int_S \vec{F} ds.$$

Esta claro que $\operatorname{div} \vec{F} = 3$, ahora veamos dónde se mueven las coordenadas para calcular la integral triple.

Veamos primero dónde se mueven x, y .

La intersección de las dos figuras

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{z}{c}, \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \end{cases}$$

se da en $z = \frac{c(-1+\sqrt{5})}{2}$, por lo que si proyectamos en el plano XY , tendremos que x, y se encuentran en la elipse $D := \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

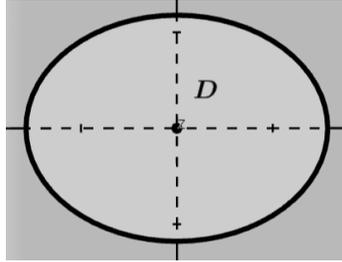


Figura 3.3.15: Proyección XY . Ejercicio 3.18

Por otro lado, z se encontraría entre el paraboloide y el elipsoide, por lo que si despejamos z , tendremos que $z \in \left(c \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right), \sqrt{c^2 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right)} \right)$.

Podemos ahora calcular la integral triple,

$$\int \int_S \vec{F} \, ds = \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} \, d(x, y, z) = \int \int_D \int_{c \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right)}^{\sqrt{c^2 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right)}} 3 \, dz d(x, y).$$

Haciendo ahora el cambio de coordenadas $x = a\rho \cos(\theta)$, $y = b\rho \sin(\theta)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int \int_D \int_{c \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right)}^{\sqrt{c^2 \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \right)}} 3 \, dz d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}} \int_{c\rho^2}^{c\sqrt{1-\rho^2}} 3ab\rho \, dz d\rho d\theta \\ &= 6\pi abc \left(\frac{1}{3} - \frac{(3-\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{2}} - \frac{3-\sqrt{5}}{8} \right). \end{aligned}$$

Ejercicio 3.19 Sea $\vec{F}(x, y, z) = (-3x^2 + y, z^2 + y, e^y + 6xz)$, considera el volumen cerrado V del interior del cono $x^2 + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{z}{3}\right)^2$ limitado por el elipsoide $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$. Calcula la integral de la superficie cerrada S (frontera de V) sobre el campo vectorial \vec{F} . ■

Solución:

Nos encontramos ante la siguiente situación:

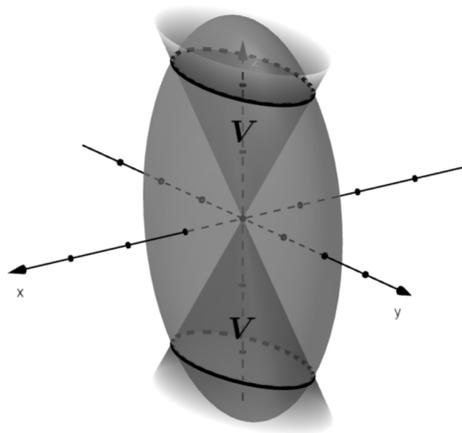


Figura 3.3.16: Ejercicio 3.19

Gracias al Teorema de la Divergencia tenemos que

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \iint_S \vec{F} ds.$$

Esta claro que $\operatorname{div} \vec{F} = 1$, ahora veamos dónde se mueven las coordenadas para calcular la integral triple. Como es simétrico calculemos el volumen de la mitad superior de V , V_1 , teniendo que

$$\iiint_V 1 d(x, y, z) = 2 \iiint_{V_1} 1 d(x, y, z).$$

Por un lado, fijémonos dónde se mueven las coordenadas x, y . Consideremos la intersección entre el cono $x^2 + \frac{y^2}{4} = \left(\frac{z}{3}\right)^2$ y el elipsoide $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$. Ésta se da en $z = \frac{3}{\sqrt{2}}$, por lo que, tendremos que x, y se encuentran en la elipse $D := \left\{x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}\right\}$.

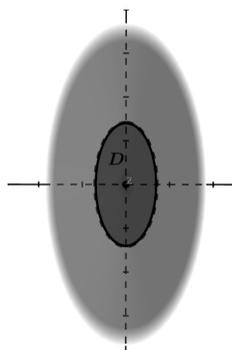


Figura 3.3.17: Proyección XY. Ejercicio 3.19

En cuanto a z , esta se encontraría entre el cono y el elipsoide, por lo que si despejamos z , tendremos que $z \in \left(3\sqrt{x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}, 3\sqrt{1 - \left(x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)} \right)$.

La integral triple sería,

$$\begin{aligned} \int \int_S \vec{F} ds &= \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z) = \int \int \int_V 1 d(x,y,z) = 2 \int \int \int_{V_1} 1 d(x,y,z) = \\ &= 2 \int \int_D \int_{3\sqrt{x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}}^{3\sqrt{1 - \left(x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)}} 1 dz d(x,y). \end{aligned}$$

Si usamos las coordenadas $x = \rho \cos(\theta)$, $y = 2\rho \sin(\theta)$, tenemos que

$$2 \int \int_D \int_{3\sqrt{x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}}^{3\sqrt{1 - \left(x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2\right)}} 1 dz d(x,y) = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{3\rho}^{3\sqrt{1-\rho^2}} 2\rho dz d\rho d\theta = 4(2 - \sqrt{2})\pi.$$

Ejercicio 3.20 Sea $\vec{F}(x,y,z) = (3x, 5e^z, xy)$, calcula la integral de flujo de la superficie del borde del sólido V dado por la región interior encerrada entre $x^2 + y^2 = z^2$ y $(z-2)^2 = 9(x^2 + y^2)$ cuando $z \geq 0$ y $z \leq 2$. ■

Solución:

El volumen podría ser esbozado como la siguiente imagen.

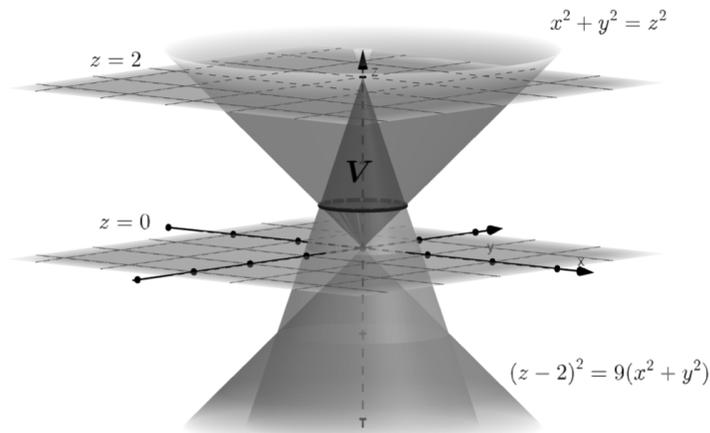


Figura 3.3.18: Ejercicio 3.20

Para esto, usaremos el Teorema de la Divergencia

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z) = \int \int_S \vec{F} ds.$$

Como $\operatorname{div} \vec{F} = 3$, calculemos la integral triple $\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x,y,z)$.

Para obtener esta integral triple, necesitamos conocer donde se mueven las coordenadas x , y , z .

Veamos primero dónde se mueve x , y .

Consideremos la intersección de los dos conos,

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, \\ (z-2)^2 = 9(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Esta se da cuando $z = \frac{1}{2}$, a esa altura, si proyectamos sobre el plano XY obtendremos que x, y se encuentran en el círculo $D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}$.

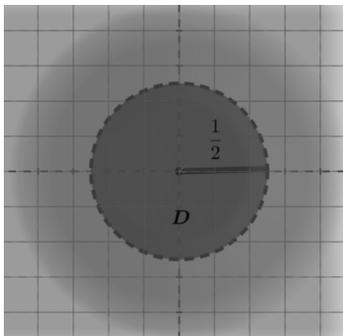


Figura 3.3.19: Proyección XY . Ejercicio 3.20

Por otro lado, veamos donde se mueve la coordenada z . Si despejamos z de las ecuaciones de los conos quedará $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = 2 \pm 3\sqrt{x^2 + y^2}$. Como $z \geq 0$, y $z \leq 2$, entonces la coordenada z se debería mover entre $\sqrt{x^2 + y^2}$ y $2 - 3\sqrt{x^2 + y^2}$.

Por tanto, la integral triple queda como

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int_D \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{2 - 3\sqrt{x^2 + y^2}} 3 dz d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\rho}^{-3\rho + 2} 3\rho dz d\rho d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 3.21 Considera ahora la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = z$. Considera el volumen V dado por la región interior de la esfera que se encuentra fuera del paraboloide. Obtén la integral de la superficie cerrada S , frontera de V mediante el uso del Teorema de la Divergencia para $\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2, z^2 + x, e^y)$. ■

Solución:

Estariamos ante la siguiente figura:

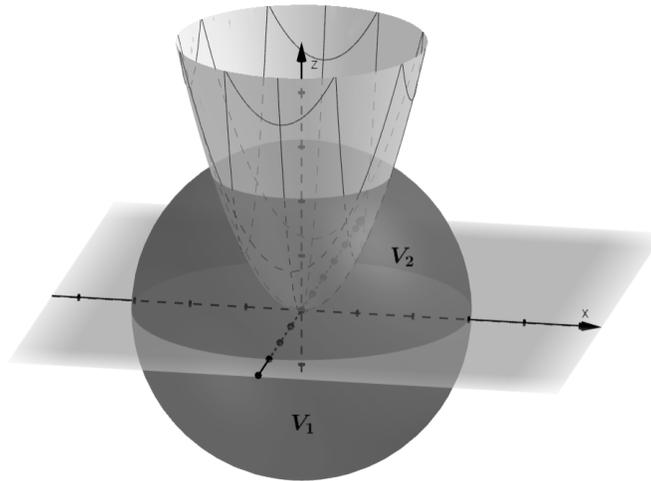


Figura 3.3.20: Ejercicio 3.21

Gracias al Teorema de la Divergencia tenemos que

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \iint_S \vec{F} ds.$$

Calculemos entonces la integral triple, separando la mitad inferior V_1 ($z \leq 0$), de la mitad superior V_2 ($z \geq 0$) tal que

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \iiint_{V_1} \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) + \iiint_{V_2} \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z).$$

1. V_1 .

Para la mitad inferior, usando coordenadas esféricas, $x = \rho \cos(\theta) \sin(u)$, $y = \rho \sin(\theta) \sin(u)$, $z = \rho \cos(u)$, podemos obtener directamente esta parte.

$$\begin{aligned} \iiint_{V_1} \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) &= \iiint_{V_1} 1 d(x, y, z) = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \rho^2 \sin(u) du d\rho d\theta = 18\pi. \end{aligned}$$

2. V_2 .

Si proyectamos la figura sobre el plano XZ , obtenemos la intersección entre la esfera y el paraboloides en el plano $y = 0$, es decir, entre $x^2 + z^2 = 9$ y $x^2 = z$.

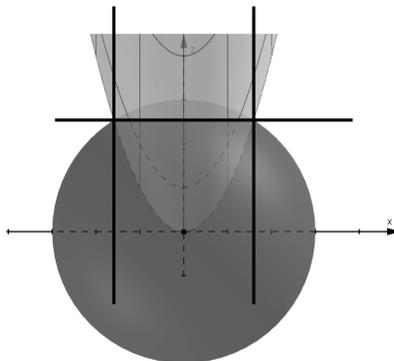


Figura 3.3.21: Proyección XZ de V_2 . Ejercicio 3.21

Se intersecan en

$$(x, z) = \left(\pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{37}}{2}}, \frac{-1 + \sqrt{37}}{2} \right)$$

Podemos separar el volumen en dos, $V_{2,1}$ la región interior encerrada por el plano $z = 0$, el paraboloides $x^2 + y^2 = z$ y el cilindro $x^2 + y^2 = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}$ y una segunda región, $V_{2,2}$, la acotada por el plano $z = 0$, el cilindro y la esfera del enunciado, teniendo que

$$\int \int \int_{V_2} \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int \int_{V_{2,1}} \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) + \int \int \int_{V_{2,2}} \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z).$$

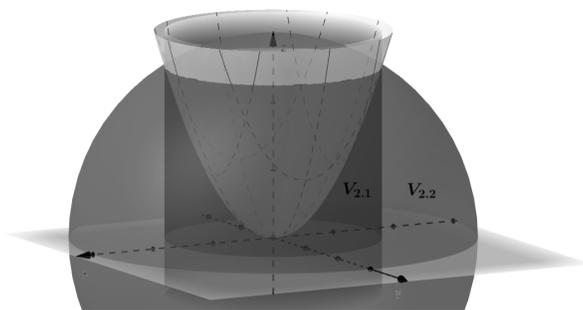


Figura 3.3.22: División de V_2 . Ejercicio 3.21

a) $V_{2,1}$.

Podemos usar coordenadas polares, teniendo en cuenta que para este volumen $z \in [0, x^2 + y^2]$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int \int \int_{V_{2,1}} \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) &= \int \int \int_{V_{2,1}} 1 d(x, y, z) = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{37}}{2}}} \int_0^{\rho^2} \rho dz d\rho d\theta = \frac{\pi(19 - \sqrt{37})}{4}. \end{aligned}$$

b) $V_{2,2}$.

Para calcular esta integral triple, veamos dónde se encuentran las coordenadas. Por un lado, z iría desde 0 hasta $\sqrt{9-x^2-y^2}$ y si proyectamos el volumen en el plano XY , nos encontraríamos que x, y pertenecen a la corona circular

$$D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{-1 + \sqrt{37}}{2} \leq x^2 + y^2 < 9 \right\}.$$

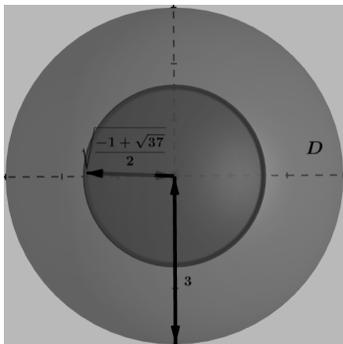


Figura 3.3.23: Proyección XY de $V_{2,2}$. Ejercicio 3.21

Así, usando coordenadas polares para la integral doble de D , tendremos la integral triple de $V_{2,2}$ expresada como

$$\begin{aligned} \int \int \int_{V_{2,2}} \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) &= \int \int_D \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} 1 dz d(x, y) = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{37}}{2}}}^3 \int_0^{\sqrt{9-\rho^2}} \rho dz d\rho d\theta = \frac{\pi(19 - \sqrt{37})^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\int \int \int_{V_2} \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \frac{\pi(19 - \sqrt{37})}{4} + \frac{\pi(19 - \sqrt{37})^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}.$$

Como conclusión llegamos a que

$$\int \int_S \vec{F} ds = \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \frac{\pi(19 - \sqrt{37})}{4} + \frac{\pi(19 - \sqrt{37})^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}} + 18\pi.$$

Ejercicio 3.22 Considera el elipsoide $(\frac{x}{2})^2 + y^2 + (\frac{z}{2})^2 = 4$ y el plano $z = 2$. Considera el volumen V dado por la figura en el interior del elipsoide y por debajo del plano. Calcula la integral de la superficie cerrada S , frontera de V mediante el uso del Teorema de la Divergencia con $\vec{F}(x, y, z) = (x + z + y, 0, 2y)$. ■

Solución:

Estaríamos ante la siguiente figura.

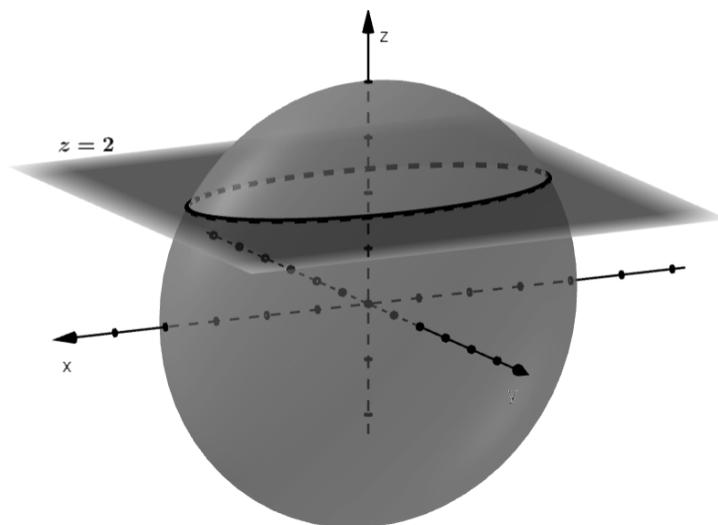


Figura 3.3.24: Ejercicio 3.22

Por el Teorema de la Divergencia tenemos que

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \iint_S \vec{F} ds.$$

Calculemos la integral triple mediante las coordenadas asociadas al elipsoide, siendo $x = 2\rho \cos(\theta) \sin(u)$, $y = \rho \sin(\theta) \sin(u)$, $z = 2\rho \cos(u)$. Está claro que $\theta \in [0, 2\pi)$, veamos la intersección para saber dónde se encuentran ρ y u . Consideremos la proyección en el plano XZ , y obtengamos la intersección del plano $z = 2$ y del elipsoide en XZ , es decir $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{z}{2})^2 = 4$.

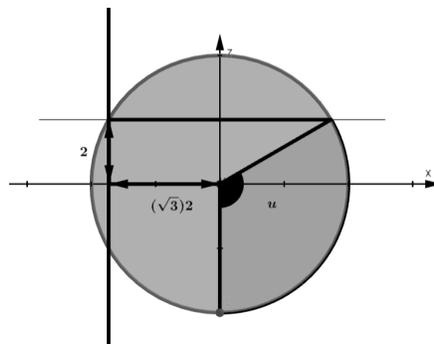


Figura 3.3.25: Proyección XZ. Ejercicio 3.22

Los puntos de intersección serán $x = \pm 2\sqrt{3}$, $z = 2$.

Considerando las coordenadas polares asociadas a esta proyección, $x = 4 \sin(u)$, $z = 4 \cos(u)$, obtenemos el ángulo de u para el cual se da la intersección, es decir, un ángulo d tal que $\sin d = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos d = \frac{1}{2}$. Por tanto, $d = \pi/3$.

Se tiene entonces que cuando u se encuentra en $[\pi/3, \pi]$, ρ se encontrará en $[0, 2)$. Y si $u \in [0, \pi/3]$, entonces ρ se encontrará entre 0 y el plano $z = 2$, que en términos de las coordenadas asociadas al elipsoide, este plano se da si $\rho = \frac{1}{\cos(u)}$, es decir $\rho \in [0, \frac{1}{\cos(u)})$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) &= \int \int \int_V 1 d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^{\frac{1}{\cos(u)}} 4\rho^2 \sin(u) d\rho du d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_{\pi/3}^{\pi} \int_0^2 4\rho^2 \sin(u) d\rho du d\theta = 4\pi + 32\pi = 36\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.23 Considera una esfera centrada en $(1, 0, 0)$ de radio 2, el plano $z = 1$ y el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x - 1, y, 0)$. Usa el Teorema de la Divergencia para calcular la integral triple de $\operatorname{div} \vec{F}$ en el volumen V dado por la parte de la esfera por debajo del plano. ■

Solución:

El volumen V se puede representar con la siguiente imagen:

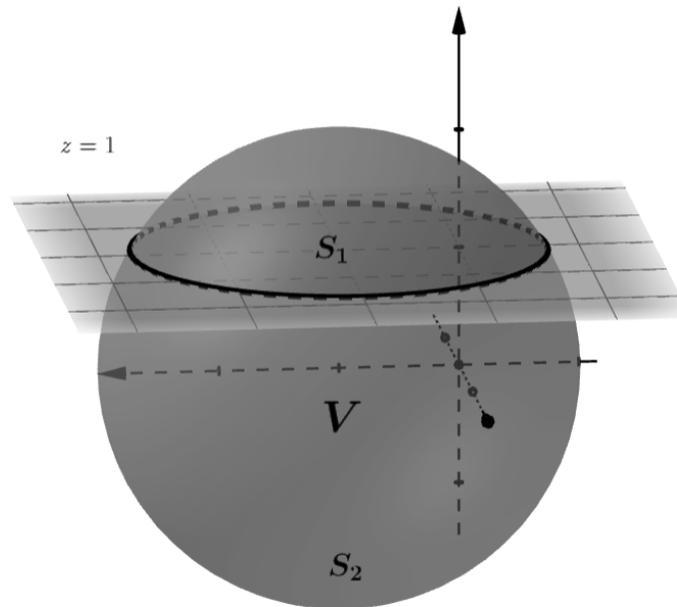


Figura 3.3.26: Ejercicio 3.23

Según el Teorema de la Divergencia tenemos que

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \vec{F} d(x, y, z) = \int \int_S \vec{F} ds.$$

Donde V es el sólido con frontera $\partial V = S = S_1 \cup S_2$, siendo el círculo S_1 y la esfera S_2 .

Calculemos la integral de superficie S ,

$$\int \int_S \vec{F} ds = \int \int_{S_1} \vec{F} ds + \int \int_{S_2} \vec{F} ds.$$

1. S_1

El círculo sería parametrizado por $\phi_1(x, y) = (x, y, 1)$ con $(x, y) \in \bar{D}_1$, donde $\bar{D}_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 2^2 - 1\}$. Por otro lado, $\vec{F}(\phi_1) = (x-1, y, 0)$ y el vector normal exterior será $\vec{n}_{\phi_1} = (0, 0, 1)$, por tanto,

$$\int \int_{S_1} \vec{F} ds = 0.$$

2. S_2

La esfera se puede parametrizar como

$$\phi_2(\theta, u) = (2 \cos(\theta) \sin(u) + 1, 2 \sin(\theta) \sin(u), 2 \cos(u))$$

Donde $\theta \in [0, 2\pi]$, y u se mueve desde el punto de intersección con el plano $z = 1$, hasta π .

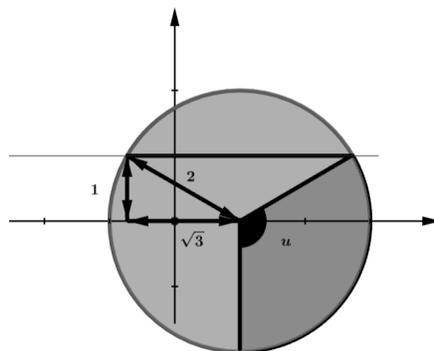


Figura 3.3.27: Proyección XZ de S_2 . Ejercicio 3.23

Obteniendo el punto de intersección, $x = 1 \pm \sqrt{3}$, $z = 1$. Ten en cuenta que la circunferencia estaría centrada en $(1, 0)$.

El ángulo, denotado como d , sería el que cumpliera que $2 \sin(d) + 1 = 1 + \sqrt{3}$ y $2 \cos(d) = 1$, es decir, $d = \pi/6$. Así pues, $u \in [\pi/6, \pi]$.

Por otro lado, el vector normal es $\vec{n}_{\phi_2} = 4(\cos(\theta) \sin^2(u), \sin(\theta) \sin^2(u), \sin(u) \cos(u))$ y $\vec{F}(\phi_2) = 2(\cos(\theta) \sin(u), \sin(\theta) \sin(u), 0)$, por lo que podemos realizar la integral de superficie,

$$\int \int_{S_2} \vec{F} ds = 8 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi} \sin^3(u) du d\theta = 16\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right).$$

Así, tenemos que

$$\int \int_S \vec{F} ds = \int \int_{S_1} \vec{F} ds + \int \int_{S_2} \vec{F} ds = 16\pi \left(\frac{2}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \right).$$