1

Conceptos Básicos

Para facilitar el uso de este material se ha incluido este capítulo, en el que se exponen conceptos fundamentales referentes a la solución de sistemas de ecuaciones. El lector que no tenga dificultades en estos aspectos puede ir directamente al segundo capítulo. Este primer capítulo es de importancia esencial ya que en una gran medida el éxito en la aplicación de los métodos de análisis dimensional se garantiza en la medida en que se resuelvan correctamente los sistemas de ecuaciones que surgen.

La gran mayoría de los Teoremas (excepto uno) se enuncia sin demostraciones. Comencemos viendo las definiciones de permutación, transposición y determinante.

1.1. Permutaciones y Transposiciones. Determinante de Orden n

Sean dados n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (que pueden ser, por ejemplo, los números $(1, 2, 3, \ldots n)$). Como se sabe, se llaman **permutaciones** de n elementos a todas las ordenaciones posibles de estos elementos. Con n elementos se puede formar un total de $n!$ permutaciones (demuéstrese esto).

Si un par (a_i, a_k) de elementos de una permutación aparece en esta de modo que el elemento con mayor índice antecede al elemento con menor índice, se dice que estos forman una **inversión.**

Supongamos que debemos encontrar el número de inversiones que presenta una permutación cualquiera formada por los números naturales $(1, 2, 3, \ldots n)$ (estos pueden ser los índices de los elementos). Para ello, calculemos primero el número de elementos que anteceden a la unidad; todos estos elementos, y solo ellos, forman inversiones con la unidad. Tachemos después la unidad y calculemos el número de elementos que anteceden al dos; estos serán todos aquellos elementos que forman inversión con el dos (sin tomar en consideración la unidad tachada que también puede formar una inversión con el dos; pero en dicho caso esta inversión ha sido ya fijada anteriormente). Tachemos luego el dos y calculemos el número de elementos que anteceden al tres, etc. Sumemos todos los números obtenidos; esta suma será igual precisamente al número total de inversiones. El número de inversiones en la permutación $i_1, i_2, \ldots i_n$ se indica así: $\left[i_1, i_2, \ldots i_n\right]$ Por ejemplo:

$$\left[2,5,1,4,7,3,6\right] = 2+0+3+1+0+1 = 7$$

Las permutaciones que presentan un número par de inversiones se llaman **pares** y las permutaciones que presentan un número impar de inversiones se llaman permutaciones **impares**.

Sea $a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots a_k, \ldots a_n$ una permutación dada de n elementos. Pongamos cada uno de los elementos a_i y a_k en el lugar del otro; obtendremos así la permutación $a_1, a_2, \ldots a_k, \ldots a_i, \ldots a_n$. Esta operación de traslado de dos elementos de una permutación se llama **transposición**.

1.1.1. Teorema

Una transposición altera la paridad de la permutación (es decir, una permutación par se hace impar y una permutación impar se hace par).

1.1.2. Corolario

El número de permutaciones impares de n elementos es igual al número de permutaciones pares (y por consiguiente, es igual a $\frac{n!}{2}$*).*

Demos ahora la definición general de un determinante. Sea dada una tabla cuadrada de n filas y n columnas (es decir, una matriz de orden n).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Los números a_{ik} se llaman elementos de la misma; las líneas horizontales de elementos se llaman filas y las verticales, columnas de la misma. Se llama determinante de esta matriz (determinante de orden n) a la suma algebraica de todos los productos posibles de elementos formados de modo que haya un factor de cada fila y uno de cada columna de la matriz A. Si en cada uno de estos productos (términos de determinante) los factores se colocan en el orden de secuencia de las columnas, se toman con el signo positivo aquellos productos para los cuales es par la permutación formada por los primeros índices y con el signo negativo aquellos para los cuales esta permutación es impar.

Resumiendo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[i_1, i_2, \ldots i_n]} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$$

donde la suma se extiende a todas las permutaciones posibles de los números $1, 2, 3, \ldots, n$. El determinante de orden n contiene $n!$ términos, ya que el número de permutaciones de n elementos es igual a $n!$. Debido al corolario del teorema anterior, justamente la mitad de estos términos aparecen en el determinante con el signo más y la misma cantidad, con el signo menos. Es necesario observar que el determinante es <u>un número</u>, a diferencia de la matriz, que es <u>un cuadro de números</u>. A menudo surgen confusiones en este aspecto, sin razón de ser.

1.1.3. Paridad de las columnas y de las filas de un determinante

El valor de un determinante no varía si este se **traspone,** es decir, si se cambia cada una de sus filas por la columna del mismo número, o sea:

<u>Si se cambian entre sí dos filas o dos columnas de un determinante, el determinante cambia solo de signo, pero su valor absoluto no varía.</u>

1.1.4. Corolario

Un determinante que tiene dos filas o dos columnas idénticas es igual a cero.

1.1.5. Proposición

Si se multiplican todos los elementos de una fila o de una columna de un determinante por un mismo número, el valor del determinante queda multiplicado por este mismo número.

Por consiguiente un factor común de todos los elementos de una fila o de una columna de un determinante puede ser separado como el factor del determinante.

1.1.6. Corolario

Un determinante con dos filas o dos columnas proporcionales es igual a cero.

1.1.7. Proposición

Si todo elemento de la k-ésima columna de un determinante viene dado como la suma de dos sumandos: $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$, es decir, si:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & b_{1k} + c_{1k} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & b_{2k} + c_{2k} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n1} & . & . & . & b_{nk} + c_{nk} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix},$$

entonces se puede representar D como la suma de dos determinantes en la forma siguiente:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & b_{1k} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & b_{2k} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n1} & . & . & b_{nk} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & c_{1k} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & c_{2k} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n1} & . & . & c_{nk} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

Una afirmación análoga es válida también para las filas.

1.2. Menores y Complementos algebraicos

Se llama **menor** M_{ik} del elemento de un determinante D de orden n al determinante de orden n-1 que se obtiene suprimiendo en D la i-ésima fila y la k-ésima columna.

Se llama complemento algebraico A_{ik} del elemento a_{ik} a su menor tomado con el signo:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

1.2.1. Teorema

Si en un determinante D de orden n todos los elementos de la k-ésima columna (fila), a excepción de uno, son iguales a cero, el determinante es igual al producto de este elemento diferente de cero por su complemento algebraico.

1.2.2. Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila o de una columna

1.2.2.1. Teorema

Todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una de sus filas (columnas) cualquiera por los correspondientes complementos algebraicos.

1.2.2.2. Teorema

La suma de los productos de los elementos de cualquier fila (o de cualquier columna) de un determinante por los complementos algebraicos de los elementos correspondientes de una línea paralela es igual a cero.

1.3. Sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas

Consideremos un sistema de *n* ecuaciones lineales con *n* incógnitas:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}$$

Se llama **solución** del sistema todo un conjunto de valores $x_1=\alpha_1, x_2=\alpha_2, \ldots, x_n=\alpha_n$ de las incógnitas que al ser introducido en las ecuaciones convierte todas estas en identidades.

Supongamos que el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas del sistema es diferente de cero:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad .$$

Multipliquemos por A_{11} la primera ecuación del sistema, por A_{21} la segunda, etc., por A_{n1} la última y sumemos todas las ecuaciones. Obtendremos la ecuación:

$$\begin{aligned}&x_1(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\ldots+a_{n1}A_{n1})+x_2(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\ldots\ldots..a_{n2}A_{n1})+\\&\ldots+x_n(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\ldots a_{nn}A_{n1})=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}\end{aligned} \quad (1.3.1)$$

es decir,

$$x_1D = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \quad (1.3.2)$$

ya que los coeficientes de las incógnitas $x_2, x_3, \ldots, x_n$, comprendidos en los paréntesis de la ecuación, son iguales a cero y el coeficiente de x_1 es igual a D. Además, para el segundo miembro se tiene:

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} = D_1 \quad (1.3.3)$$

Donde D_1 es el determinante que se obtiene de D sustituyendo su primera columna por la columna de los términos independientes. (En el segundo miembro de las igualdades (1.3.1) y (1.3.2) aparece el desarrollo del determinante D_1 por la primera columna).

Además

$$ax_2D=D_2,\ldots x_nD=D_n \quad (1.3.4)$$

Donde D_i es el determinante que se obtiene de D sustituyendo la i-ésima columna por la columna de los términos independientes. El sistema formado por las ecuaciones (1.3.2) y (1.3.3) es un corolario del sistema de ecuaciones. Hemos demostrado, por consiguiente, que el sistema tiene solución, que esta será también solución del sistema (1.3.1) y (1.3.2) y que:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots\ldots\ldots.x_n = \frac{D_n}{D} \quad (1.3.5)$$

Las fórmulas (1.3.5) se llaman **fórmulas de Cramer.**

Realizando la sustitución directa de estos valores de las incógnitas en todas las ecuaciones del sistema, se puede comprobar que forman efectivamente una solución del mismo.

1.3.1. Teorema

En el caso en que $D = 0$ el sistema tiene una solución única determinada por las fórmulas de Cramer

1.4. Rango de una matriz

Consideremos de nuevo los cuadros de números (matrices) pero sin exigir ahora que el número de filas de la matriz sea igual al número de sus columnas. Introduciremos para estas matrices (rectangulares) el importante concepto de **rango**.

Consideremos una matriz rectangular formada por m filas y n columnas (una matriz $\left[m \times n\right]$). Sea $k \le m \;\; y \;\; k \le n$. Fijemos en esta matriz cualesquiera k filas y k columnas. Con los elementos que figuran en los cruces de las filas y de las columnas fijadas se puede formar un determinante de orden k. Todos los determinantes de este tipo se llaman menores de esta matriz. Es obvio que de una $[m \times n]$-matriz se puede formar $C_m^k.C_n^k$ menores de orden k. Por ejemplo, dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede formar $C_4^1.C_3^1 = 12$ menores de orden 1 que vienen a ser los propios elementos de la matriz **A** se puede formar $C_4^2.C_3^2 = 6.3 = 18$ menores de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

y se puede formar $C_4^3.C_3^3 = 4$ menores de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

1.4.1. Definición

Se llama **rango de una matriz** el orden máximo de sus menores diferentes de cero.

Por ejemplo, Es fácil comprobar que todos los menores de tercer orden de la matriz **A** son iguales a cero y que no todos los menores de segundo orden son iguales a cero (el primero de los menores escritos de orden dos ya es diferente de cero). En este caso diremos que el rango de la matriz **A** es igual a 2 y denotaremos $\mathrm{r}(\mathbf{A})=2$.

Se llaman **transformaciones elementales** de una matriz las siguientes transformaciones de la misma:

1.- La **transposición,** es decir la sustitución de toda la fila por la columna del mismo número y viceversa.

2.-El cambio entre sí de dos filas o de dos columnas.

3.- La multiplicación de todos los elementos de una fila o de una columna por cualquier número **c** diferente de cero.

4.- La adición a todos los elementos de una fila o de una columna de los elementos correspondientes de una línea paralela multiplicados por un mismo número.

1.4.2. Teorema: Sobre las transformaciones elementales

El rango de una matriz no varía en las transformaciones elementales

Ejemplo:

Calcúlese, empleando las transformaciones elementales, el rango de la matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

considerada al principio del párrafo.

Solución:

Restando de la tercera fila la primera duplicada, dividiendo la segunda columna por 2 y restando después de la primera columna la segunda triplicada, de la tercera columna la segunda y de la cuarta columna la segunda duplicada, obtenemos consecutivamente:

$$A \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

donde el signo ~ significa que las matrices que él une se obtienen una de la otra mediante transformaciones elementales y tienen, por consiguiente, el mismo rango.

Agregando ahora a la tercera fila la segunda triplicada, dividiendo la primera columna por 2, agregándola a la tercera columna, restándola de la cuarta columna y finalmente, cambiando entre sí las dos primeras columnas, obtendremos:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Encontramos de nuevo que el rango de la matriz A es igual a 2.

1.5. Noción de Dependencia Lineal

Si indicamos por:

$$\mathbf{e}_1 = (3,2,1,2), \quad \mathbf{e}_2 = (2,0,-1,1), \quad \mathbf{e}_3 = (0,4,5,1),$$

las filas de la matriz A, es evidente que tiene lugar la igualdad:

$$\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$$

comprendida en el sentido de adición término por término: todo elemento de la fila $\mathbf{e}_3$ es igual al correspondiente elemento de la fila $\mathbf{e}_1$ multiplicado por 2 menos el correspondiente elemento de la fila $\mathbf{e}_2$ multiplicado por 3:

En general, siendo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_m$ filas de una matriz $\mathbf{A}$ y siendo por ejemplo:

$$\mathbf{e}_m = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_{m-1} \mathbf{e}_{m-1}, \tag{1.5.1}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ son unos números cualesquiera, diremos que la m-ésima fila de esta matriz se expresa linealmente en términos de sus primeras m-1 filas o que la fila $\mathbf{e}_m$ es una combinación lineal de las filas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{m-1}$. De la igualdad (1.5.1) se deduce que

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_{m-1} \mathbf{e}_{m-1} - \mathbf{e}_m = 0$$

donde el cero del segundo miembro es comprendido como la fila nula (es decir, como la fila formada por n ceros).

Diremos que las filas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_m$ de una matriz **A** son **linealmente dependientes,** si se pueden encontrar números $y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ no todos iguales a cero, tales que:

$$\mathbf{e}_m = y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + y_m \mathbf{e}_m = 0 \qquad (1.5.2)$$

Si tales números y_i no existen, es decir, si la igualdad (1.5.2) tiene lugar sólo en el caso en que todos los $y_i = 0$, se dice que las filas $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_m$ son **linealmente independientes.**

1.5.1. Teorema

Sobre el rango de una matriz

Siendo r el rango de una matriz se puede encontrar en esta matriz r filas (columnas) linealmente independientes en términos de las cuales se expresan linealmente todas las demás filas (columnas).

1.6. Sistemas arbitrarios de ecuaciones lineales

Consideremos ahora un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \qquad (1.6.1)$$

donde no se supone que el número de las incógnitas es igual al número de las ecuaciones.

Se llama solución del sistema (1.6.1) a todo conjunto de *n* valores de las incógnitas $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ que al ser introducido en las ecuaciones convierte todas estas en identidades. Un sistema que posee una solución única se llama **determinado** y un sistema que tiene más de una solución se llama **indeterminado.**

Consideremos dos matrices: la matriz **A** formada por los coeficientes de las incógnitas del sistema (1.6.1) y la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m1} & . & . & . & . & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

que se obtiene de **A** agregando la columna de los términos independientes y que se denomina ***matriz ampliada.*** Está claro que $r(\mathbf{B}) \geq r(\mathbf{A})$, ya que todo menor de la matriz **A** es un menor de la matriz **B** pero no viceversa.

1.6.1. Teorema

Criterio de Compatibilidad de un Sistema de Ecuaciones Lineales:

Para que el sistema (1.6.1) sea compatible es necesario y suficiente que el rango de la matriz ampliada **B** *sea igual al rango de la matriz de los coeficientes.*

1.6.2. Sistemas homogéneos

Las ecuaciones lineales homogéneas son las ecuaciones en las que el segundo miembro es igual a cero:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{aligned} \qquad (1.6.2.1)$$

Este sistema es siempre compatible ya que posee, por ejemplo, la solución **nula**:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

(es decir, la solución en la que los valores de **todas** las incógnitas son iguales a cero).

Es importante saber bajo qué condiciones el sistema homogéneo (1.6.2.1) tiene soluciones no nulas. La respuesta a este problema viene dada por el teorema siguiente.