Aproximación algebraica a las magnitudes y su medida*

Algebraic Approach to Magnitudes and their Measurement

Francisco Gil Cuadra[1]
Emilio Gil Martínez[2]
María Francisca Moreno Carretero[3]

Resumen

Las magnitudes y su medida están presentes en las diversas etapas de la Educación Obligatoria por, entre otras razones, su frecuente uso en la vida cotidiana. En este capítulo se aporta la interpretación algebraica de estos contenidos con objeto de ofrecer al profesorado o personas interesadas la posibilidad de complementar, con la formalización matemática, los tratamientos usuales en las diferentes etapas educativas. Se detalla la estructura algebraica de la magnitud, caracterizando las magnitudes continuas y discretas identificando las propiedades que estas poseen. Una vez formalizada la unidad de medida se define la medida de la magnitud y la proporcionalidad, tanto directa como inversa, de magnitudes. A lo largo de todo el proceso de formalización matemática se aportan algunos detalles vinculados a los procesos de enseñanza-aprendizaje de estos contenidos.

Palabras clave: magnitudes, medida, proporcionalidad de magnitudes, estructuras algebraicas

---

* Gil, F., Gil, E., Moreno, M. F. (2019). Aproximación algebraica a la magnitud y su medida. En A. Codina y M. F. Moreno (Eds.), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico: 2018* (pp. 19-57). Almería, España: Editorial Universidad de Almería.

1 Universidad de Almería

2 Universidad de Almería

3 Universidad de Almería

Abstract

Magnitudes and their measurement are present in Compulsory Education for, among other reasons, their frequent use in everyday life. This chapter provides the algebraic interpretation of these contents in order to offer teachers or interested people the possibility of complementing with the mathematical formalization the usual treatments in the different educational stages. The algebraic structure of the magnitude is detailed, characterizing the continuous and discrete magnitudes identifying the properties they possess. Once the unit of measurement is formalized, the measure of magnitude and proportionality, both direct and inverse, of magnitudes are defined. Throughout the process of mathematical formalization, some details related to the teaching-learning processes of these contents are provided.

Keywords: magnitude, measurement, proportionality of magnitudes, algebraic structures.

Introducción

Dentro de la amplia actividad profesional de Francisco Gil Cuadra, resultado de su encomiable entrega al trabajo y generosidad durante más de 35 años, ha atendido numerosos intereses que resulta complicado resumir. En este capítulo nos centramos en un ámbito objeto permanente de su reflexión, las magnitudes y su medida. Nuestro amigo y compañero lo ha tratado desde diversos enfoques a través de comunicaciones realizadas en congresos a los que asiste y ha ocupado un lugar destacado en el concurso-oposición para alcanzar la titularidad de Escuela Universitaria y posteriormente, la Titularidad de Universidad. Igualmente, es autor del libro *Superficie y volumen: algo más que el trabajo con fórmulas*, con el que ha contribuido a uno de los primeros esfuerzos conjuntos desarrollados en los inicios del área de conocimiento, la colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Sería prolijo comentar en detalle toda su producción en esta línea, pero destacamos el interés mantenido sobre ella a lo largo de toda su carrera profesional. Precisamente la medida del volumen en la formación inicial docente ha sido objeto de una de sus últimas publicaciones en la revista Enseñanza de las Ciencias.

Las magnitudes y su medida presentan una peculiaridad compartida con otros contenidos de la Educación Obligatoria. Cuando los docentes tienen que impartirlos han de hacerlo, básicamente, partiendo de lo estudiado en niveles anteriores a su formación universitaria. Durante esta última etapa educativa no es usual haber tenido oportunidad de analizarlos a un nivel matemático avanzado. Con objeto de suplir esta laguna, en este capítulo se recoge un trabajo orientado a sistematizar, desde el punto de vista algebraico, las magnitudes y la medida. Francisco Gil consideraba que constituía un enfoque complementario al tratamiento difundido en la literatura (Chamorro y Belmonte, 1988; Olmo, Gil y Moreno, 1989; Roanes, 1972; Roanes, 1980) y según nos manifestó en varias ocasiones, tenía especial interés en publicarlo. Por motivos que no vienen al caso, la decisión se fue postergando y no se dio el paso decisivo para que las siguientes páginas vieran la luz. Publicándolo sentimos que concretamos uno de sus deseos y le rendimos homenaje.

A. Magnitudes

1. Magnitudes y su Medida

1.1. Notación

Sea M un semigrupo conmutativo, que escribiremos con notación aditiva. Si $m \in M$ p es un número natural mayor que 1, escribiremos

$$m + \ldots^{(p} \ldots + m = pm \quad [1.1.1]$$

Para p=1, escribiremos

$$1m = m \quad [1.1.2]$$

y si el semigrupo posee elemento neutro (que notaremos por 0), escribiremos

$$0m = 0 \quad [1.1.3]$$

1.2. Corolario

Cualesquiera que sean los números naturales p y q , y los elementos m, $m' \epsilon M$, se verifican las siguientes relaciones:

$$p\ (m+m')=pm+pm' \quad [1.1.4]$$
$$(p+q)\ m=pm+qm \quad [1.1.5]$$
$$p(qm)=(pq)m \quad [1.1.6]$$

1.3. Definición

Llamaremos magnitud a un semigrupo conmutativo , que verifique las dos condiciones siguientes

$$p,\ q\ \in N,\ m \in M,\ m \neq 0;\ p\ m=q\ m \Rightarrow p=q \quad [1.2.1]$$
$$p\ \in N,\ p \neq 0,\ m,\ m\ ' \in M,\ p\ m=p\ m' \Rightarrow m=m' \quad [1.2.2]$$

A estas dos últimas propiedades se les conoce con el nombre de cancelativas o simplificativas.

Este criterio excluye del concepto de magnitud a todas aquellas magnitudes conocidas como «extensivas» frente a las que sí se recogen en esta definición las denominadas por algunos autores como «intensivas». Se pueden citar como ejemplos de semigrupos aditivos considerados magnitudes la «longitud» o la «amplitud» para referirse a ángulos generales. Por otra parte, destacar el hecho de que situaciones como «día» o «persona» introducidas por Roanes (1972) también responden a esta definición de magnitud puesto que se pueden sumar grupos de personas y multiplicarlos por un escalar verificando las condiciones anteriores.

Podemos aportar contraejemplos, este es el caso del semigrupo consistente en la unión de partes de un conjunto E, que no es una magnitud por no verificar la condición [1.2.1], ya que, si $E \neq \emptyset$ y $p>1$.

$E=E \cup \ldots \cup E=E=1\ E$

El semigrupo $Z/(p)$ de las clases residuales módulo p, tampoco es una magnitud pues

$p\ (1+p\mathbb{Z})=0+p\mathbb{Z}=p\ (0+p\mathbb{Z}), \qquad p \in \mathbb{Z}^{+}$

1.4. Proposición

Todo espacio vectorial, M, sobre un cuerpo $\mathbb{Q}$, es una magnitud.

Demostración

Comencemos probando [1.2.1]. Sean $m \in M$, $m \neq 0$; $p, q \in \mathbb{N}$ y supongamos $p\ m = q\ m$. *Si* $p=0=q$, la cuestión es trivial. Si, por ejemplo, $q \neq 0$, entonces $q^{-1}\ p\ m = m$, luego $(q^{-1}\ p-1)m=0$, y por tanto, $q^{-1}\ p-1=0$, luego $p=q$.

Para probar [1.2.2], siendo ahora, $m, m' \in M$, $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$; supongamos que $pm=pm'$. Basta multiplicar por p^{-1}, para concluir que $m=m'$.

Ejemplo. El plano vectorial es una magnitud. Todo espacio vectorial racional, de dimensión finita o no, es una magnitud.

Nota. La proposición anterior es válida sustituyendo $\mathbb{Q}$ por cualquier cuerpo K, de característica cero. Si K fuese de característica $p \neq 0$, entonces

$$pm=m+\ldots^{(p}\ldots+m=1\ m+\ldots^{(p}\ldots+1m=(1+\ldots^{(p}\ldots+1)m=0\ m=\ 0=p\ 0$$

lo que si $m \neq 0$, estaría en contradicción con [1.2.2].

1.5. Definición

A los elementos del semigrupo conmutativo M, que es una magnitud, les llamaremos cantidades.

Ejemplos: Las cantidades de la magnitud longitud son los segmentos generales, y las cantidades de la magnitud amplitud son los ángulos generales.

1.6. Definición

La magnitud M se dice relativa si el semigrupo M es un grupo abeliano y absoluta, si no lo es.

Ejemplos: Las magnitudes amplitud, longitud, extensión, volumen, «persona» y «día» son absolutas, y la magnitud amplitud orientada sería relativa.

2. Semianillo y semimódulo de una magnitud

2.1. Notación

Dada una magnitud M y un número entero negativo p, designaremos por pm a la cantidad $-((-p)m)$, si existe, es decir, definimos

$$pm= -((-p)m)=(-m)+ \ldots ^{(-p} \ldots +(-m) \quad [2.1.1]$$

2.2. Corolario

Las relaciones [1.1.4], [1.1.5] y [1.1.6] son ciertas, siendo p y q dos enteros cualesquiera.

Observación: Si M es una magnitud relativa, siempre existe $-m$, y por tanto siempre existe $pm,\ p\epsilon\mathbb{Z}$.

2.3. Proposición

Toda magnitud absoluta tiene estructura de $\mathbb{N}-$semimódulo y toda magnitud relativa tiene estructura de $\mathbb{Z}-$módulo.

Su demostración es consecuencia de lo anteriormente expuesto.

2.4. Definición

Una magnitud M se dice divisible si para todo $m\epsilon M$ existe $m'\epsilon M$ verificándose

$$m=nm' \quad [2.3.1]$$

a m' la notaremos también como $\frac{1}{n}m$

$$m' = \frac{1}{n}m$$

2.5. Corolario

Si una magnitud M es divisible se verifica que

$$\exists m\epsilon M,\ n\epsilon\mathbb{N}^*, \exists m'\epsilon M \ /\ zm=pm' \text{, o bien, } \frac{z}{p}\ m\ =m' \quad [2.3.2]$$

Es necesario llamar la atención llegados a este punto. Solemos pensar que todas las magnitudes van a ser divisibles puesto que este término siempre ha sido utilizado referido a medidas como longitud o amplitud. De hecho, Russell (1983, p.195) indica «En el caso de la magnitud, el significado común parece implicar: 1) Una capacidad para las relaciones de mayor y menor; 2) la divisibilidad». Sin adentrarnos en el detallado análisis que este autor aporta sobre los significados de estas nociones, destacamos que el caso de las magnitudes «día o «persona» no cumplen este requisito para ser magnitudes divisibles, pero sí son divisibles la longitud o la amplitud. Para estas últimas, magnitudes divisibles, veremos más adelante cómo son susceptibles de ser medidas mientras que para el caso de no las divisibles se nos presenta una situación de cardinal o conteo.

2.6. Proposición

Si las fracciones $\frac{z}{p}$ y $\frac{x}{q}$ son equivalentes entonces

$$\forall\, m \in M, \quad \frac{z}{p} m = \frac{x}{q} m \ \text{(si existen).}$$

Demostración

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{z}{p}\, m = m' \underset{[2.3.3]}{\Longrightarrow} zm = pm' \underset{[1.1.6]}{\Longrightarrow} xzm = xpm' \\[2ex] \dfrac{x}{p}\, m = m'' \underset{[2.3.3]}{\Longrightarrow} xm = qm'' \underset{[1.1.6]}{\Longrightarrow} zxm = zqm'' \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow xpm' = zqm''$$

y como por hipótesis, $xp = zq$. Se tiene

$$\text{si } x = 0, \text{ entonces } z = 0 \text{ y } m' = m'' = 0 \Rightarrow \frac{z}{p}\, m = \frac{x}{q}\, m = 0$$

$$\text{si } x \neq 0, \text{ entonces por [1.2.2] } m' = m'' \Rightarrow \frac{z}{p}\, m = \frac{x}{q}\, m$$

2.7. Proposición

Si la cantidad $m \neq 0$, entonces $\frac{z}{p} \neq \frac{x}{q} \Rightarrow \frac{z}{p}\, m \neq \frac{x}{q}\, m$

Demostración

Probemos el contrarrecíproco

$$\frac{z}{p}\, m = \frac{x}{q}\, m \;\Rightarrow\; \frac{zq}{pq}\, m = \frac{px}{pq}\, m \;\Rightarrow\; pq\left(\frac{zq}{pq}\, m\right) = pq\,\left(\frac{px}{pq}\, m\right) \;\Rightarrow$$

$$zqm = pxm \;\underset{[1.2.1]}{\Longrightarrow}\; zq = px \;\Rightarrow\; \frac{z}{p} = \frac{x}{q}$$

2.8. Proposición

Las proposiciones [1.1.4], [1.1.5] y [1.1.6] son ciertas cuando y son números racionales, es decir

$$\frac{z}{p}(m + m') = \frac{z}{p}\, m + \frac{z}{p}\, m' \qquad [2.6.1]$$

$$\left(\frac{z}{p} + \frac{x}{q}\right) m = \frac{z}{p}\, m + \frac{x}{q}\, m \qquad [2.6.2]$$

$$\frac{z}{p}\left(\frac{x}{q} m\right) = \left(\frac{z}{p}\frac{x}{q}\right) m \qquad [2.6.3]$$

Demostración

Comencemos por [2.6.1]

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{z}{p}\, m = m_1 \underset{[2.3.2]}{\Longrightarrow} \quad zm = pm_1 \\[2ex] \dfrac{z}{p} m' = m'_1 \underset{[2.3.2]}{\Longrightarrow} zm' = pm'_1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\; zm + zm' = pm_1 + pm'_1 \Rightarrow z(m + m') = p\,(m_1 + m'_1) \Rightarrow m_1 + m'_1 = \frac{z}{p}\, m + \frac{z}{p}\, m'$$

Probemos ahora [2.6.2]

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{z}{p}\, m = m' \Rightarrow \quad zm = pm' \Rightarrow\; qzm = qpm' \\[2ex] \dfrac{x}{q}\, m = m'' \Rightarrow xm = qm'' \Rightarrow\; pxm = pqm'' \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow (qz + px)m = pq(m' + m'') \Rightarrow m' + m'' = \frac{qz + px}{pq} m = \left(\frac{z}{p} + \frac{x}{q}\right) m$$

Finalmente, probemos [2.6.3]

$$\left.\begin{array}{l} \frac{z}{p} m = m' \Rightarrow \quad zm = pm' \Rightarrow xzm = xpm' \\ \frac{x}{q} m' = m'' \Rightarrow xm' = qm'' \Rightarrow pxm' = pqm'' \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow xzm = pqm'' \Rightarrow m'' = \frac{zx}{pq} m = \left(\frac{z}{p}\frac{x}{q}\right) m$$

2.9. Notación

Independientemente de que M sea, o no, divisible, designaremos $S(M)$ por al conjunto de números racionales

$$S(M) = \{x \in \mathbb{Q} \; / \; \forall m \in M; \; \exists m' \in M, \; xm = m'\}$$

2.10. Corolario

Si M es una magnitud absoluta divisible $S(M) = \mathbb{Q}_+$. Si M es una magnitud relativa divisible $S(M) = \mathbb{Q}$. Si M es una magnitud absoluta no divisible entonces $S(M) = \mathbb{N}$. Si M es una magnitud relativa no divisible entonces $S(M) = \mathbb{Z}$.

Ejemplos. Si M es la magnitud longitud, amplitud o extensión entonces $S(M) = \mathbb{Q}_+$. Si M es la magnitud amplitud orientada $S(M) = \mathbb{Q}$. Si M es la magnitud «día» o «persona» entonces $S(M) = \mathbb{N}$.

2.11. Proposición

$S(M)$ es un semianillo unitario del semianillo de los números racionales (respecto de las operaciones de suma y producto).

Demostración

Comenzamos probando que la suma es una ley de composición interna en $S(M)$

$$\frac{z}{p} \in S(M) \;\Rightarrow\; \forall\, \mathrm{m} \in \mathrm{M}, \exists \mathrm{m}' \in \mathrm{M}, \qquad \mathrm{zm} = \mathrm{pm}' \Rightarrow \mathrm{qzm} = \mathrm{qpm}' \Big]$$

$$\frac{x}{q} \in S(M) \;\Rightarrow \forall\, \mathrm{m} \in \mathrm{M}, \exists \mathrm{m}'' \in \mathrm{M}, \qquad \mathrm{xm} = \mathrm{qm}' \Rightarrow \mathrm{pxm} = \mathrm{pqm}'' \Big]$$

$$(qz + px)\, m = pq\, (m' + m'') \Rightarrow m' + m'' = \frac{qz + px}{pq}\, m = \left(\frac{z}{p} + \frac{x}{p}\right) m \Rightarrow \frac{z}{p} + \frac{x}{q} \epsilon\, S(M)$$

puesto que $\forall m\, \epsilon M, \exists m' + m'' \epsilon M$ verificando lo deseado.

Probemos que el producto es una ley de composición interna en $S(M)$

$$\frac{z}{p} \in S(M) \Rightarrow \forall\, \mathrm{m} \in \mathrm{M}, \exists \mathrm{m}' \in \mathrm{M}, \qquad \mathrm{zm} = \mathrm{pm}' \Rightarrow \mathrm{xzm} = \mathrm{xpm}' \Big]$$

$$\frac{x}{q} \in S(M) \Rightarrow \forall\, \mathrm{m}' \in \mathrm{M}, \exists \mathrm{m}'' \in \mathrm{M}, \qquad \mathrm{xm}' = \mathrm{qm}'' \Rightarrow \mathrm{pxm}' = \mathrm{pqm}'' \Big]$$

$$qpm'' = pxm' = xzm \;\Rightarrow m'' = \frac{xz}{pq}\, m = \left(\frac{x}{q} . \frac{z}{p}\right) m \Rightarrow \frac{z}{p} . \frac{x}{q} \epsilon\, S(M)$$

Por tanto $S(M)$, es un subsemianillo de $\mathbb{Q}$, y este subsemianillo es unitario, es decir $1 \epsilon\, S(M)$ por [1.1.2].

2.12. Definición

Al semianillo $S(M)$ le llamaremos semianillo de medición (racional) de la magnitud M.

2.13. Proposición

La magnitud M es un semimódulo sobre el semianillo $S(M)$.

Demostración

Se sigue de [2.6.1], [2.6.2], [2.6.3] y de [1.1.2].

2.14. Definición

Al semimódulo indicado, en [2.10], le llamaremos semimódulo de medición de la magnitud M.

2.15. Proposición

Si S' es un subsemianillo de $\mathbb{Q}$y la magnitud M es un S'–semimódulo, es decir, M es un semimódulo respecto de la operación externa

E:S'xM→*M*, entonces *S'* es un subsemianillo de *S*(*M*) y *E* es la restricción de *S'xM* de la operación externa del semimódulo de medición de *M*.

Demostración

Por definición de semimódulo

$$E(1, m) = m = 1m$$

Si $0 \in S'$ y $0 \in M$, entonces

$$E(1, m)=E(0+1, m) = E(0, m)+ E(1, m)$$

luego por la unicidad del elemento neutro del semigrupo

$$E(0, m)=0=0m$$

Si el número natural $p \in S'$, siendo $p>1$, entonces

$$E(p, m)=E(1+\ldots^{p})\ldots+1, m) = E(1, m)+..^{p})\ldots +E(1, m)=m+\ldots^{p})\ldots+m=pm$$

Si el entero $-p$, *con* $p>0$, $p \in S'$, entonces

$$0=E(0, m)=E(p+(-p), m) = E(p, m)+E(-p, m)$$

luego

$$E(-p, m)=-E(p, m) = -(pm)=(-p)m$$

Si el racional $z/p \in S'$, entonces

$$zm = E(z,m) = E\left(\frac{z}{p},m\right) = p\,E\left(\frac{z}{p},m\right)$$

Luego según [2.3.2]

$$E\left(\frac{z}{p},m\right) = \frac{z}{p}m$$

Además, se ha probado que si $z/p \in S'$ entonces $z/p \in s(M)$.

Nota. En el caso en que la magnitud sea relativa y divisible, hemos dotado a de una estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo .

3. Magnitudes continuas

Es usual definir magnitud como un semigrupo conmutativo y ordenado. Aunque en nuestro caso no hayamos exigido la condición de ordenado desde el principio, por ganar generalidad.

3.1. Definición

Diremos que la magnitud M es ordenada (totalmente ordenada) si el semigrupo cancelativo y conmutativo es ordenado (totalmente ordenado), es decir, si sobre M está definida una relación de orden (orden total) compatible con la operación del semigrupo.

Ejemplo. La longitud, el área, el volumen, la amplitud, la amplitud orientada, la magnitud «día», etc. son magnitudes totalmente ordenadas.

3.2. Definición (Propiedad de Arquímedes)

Una magnitud, , se dice arquimediana si es totalmente ordenada, y verifica

$$\forall m,\ m' \in M \ /\ m > m' > 0, \quad \exists k \in N, \quad km' > m$$

Ejemplos. La longitud, la amplitud, la superficie y el volumen son magnitudes arquimedianas. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos con la operación de sumar y el orden lexicográfico, sería una magnitud totalmente ordenada, pero no sería arquimediana.

Nota. En lo sucesivo consideraremos definidos conceptos básicos de análisis matemático, como los de sucesión, sucesión convergente, sucesión de Cauchy o fundamental, valor absoluto, etc.

3.3. Proposición

Una magnitud, M, totalmente ordenada y divisible es arquimediana si y solo si la sucesión $\langle \frac{m}{n} \rangle$ es nula.

Demostración

Sea M arquimediana, dada $M \in M$ (que consideraremos positiva por simplicidad) veremos que $\langle \frac{m}{n} \rangle$ es nula.

Efectivamente, $\alpha \in M, \propto > 0$ entonces

- Si $m \leq \alpha$, basta tomar N=2 en la definición de sucesión nula para tener lo deseado.
- Si $m > \alpha$, por ser M arquimediana existe $N \epsilon \mathbb{N}$ tal que $m < N\alpha \Longrightarrow \frac{m}{n}$ >0

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ se verifica $0 < \frac{m}{n} < \alpha$, por tanto $\langle \frac{m}{n} \rangle$ es nula.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\forall m \in M$ la sucesión $\langle \frac{m}{n} \rangle$ es nula. Sean α, $m \in M$, dos cantidades cualesquiera verificando que $m > \alpha > 0$. Por ser la sucesión $\langle \frac{m}{n} \rangle$ nula, se tiene que $\exists N \epsilon \mathbb{N}$, $n \geq N$ se verifica $0 < \frac{m}{n} < \alpha$, de donde $m < n\alpha$, y por tanto, M es arquimediana.

3.4. Definición

Una magnitud M totalmente ordenada y divisible se dice continua si verifica alguna de las siguientes condiciones:

1. (Axioma de Dedekind). Si las cantidades se clasifican en dos clases de modo que toda cantidad de la primera sea menor que cualquiera de la segunda, existe una única cantidad de separación entre ambas clases, es decir, que es mayor o igual que todos los elementos de la primera e igual o menor que todos los elementos de la segunda clase.
2. (Axioma del supremo) Todo conjunto de cantidades no vacío y mayorado tiene un supremo, y todo conjunto de cantidades no vacío y minorado tiene un ínfimo.

Ejemplos. La longitud, la amplitud, la amplitud orientada, la superficie y el volumen son magnitudes continuas.

3.5. Proposición

Las condiciones 1) y 2) de la definición anterior son equivalentes.

Demostración

1) ⇒2) Sea $C \subset M$, no vacío y mayorado. Veamos que tiene supremo. Definimos C_1={m$\in M$, $\exists$c$\in C$, m$\leq$c} y C_2={m$\in M$, m$\notin C_1$}. C_1 es no vacío por serlo C y estar $C \subset C_1$. C_2 no es vacío, pues si μ es un mayorante de C μ>0, 2 $\mu \notin C_1$ y por tanto 2 $\mu \epsilon C_2$.

Además de la definición de C_2 (y de C_1) se tiene que todo elemento de C_2 es mayor que cualquier elemento de C, y por tanto que cualquier elemento de C_1. Aplicando la condición 1) tenemos que existe una cantidad s de separación entre C_1 y C_2. Este elemento s es el supremo de C, pues es un mayorante (es mayor o igual que todo elemento de C_2).

Análogamente se demostraría que todo conjunto de cantidades no vacío y minorado tiene ínfimo.

2) ⇒1) Sean C_1 y C_2 dos clases que verifican las condiciones exigidas por la propiedad 1). Entonces cualquier elemento de C_2 es un mayorante de C_1, por tanto, C_1 está mayorado y por la condición 2) tendrá un supremo s, que será un elemento mayor o igual que todos los de C_1 y menor o igual que todos los de C_2.

3.6. Proposición

Si una magnitud M es divisible, totalmente ordenada y relativa la condición 2) es equivalente a

2′) Todo conjunto de cantidades no vacío y mayorado tiene supremo.

O bien a

2″) Todo conjunto de cantidades no vacío y minorado tiene ínfimo.

Demostración

Veamos la equivalencia de 2) y 2′). Trivialmente 2)⇒2′).

Demostremos pues, que si todo conjunto de cantidades no vacío y mayorado tiene supremo, entonces todo conjunto no vacío y minorado tiene ínfimo. Sea un conjunto no vacío y minorado. Si notamos $-A=\{-a, a \in A\}$, comenzaremos probando que una cantidad m es minorante de A si, y sólo si, $-m$ es mayorante de $-A$:

m es un minorante de $A \Leftrightarrow m \leq a \ \forall a \in A \Leftrightarrow -m$ es minorante de $-A$

Sea h el supremo de $-A$; como h es mayorante de $-A$, $-h$ es minorante de A. Nos queda probar que $-h$ es el mayor de los minorantes del conjunto A: si m es minorante de A se tiene que $-m$ es mayorante de $-A$, luego $-m \geq h$ y $m \leq -h$ y así $-h$ es el ínfimo de A.

Análogamente se demostraría la equivalencia con 2′).