TEMA 1: Introducción a los métodos de valoración

1. Concepto de función de capitalización / descuento

En procesos de valoración en los que interviene el tiempo, es necesario introducir previamente el concepto de función de capitalización y de función de descuento.

Definición 1. Una *función (dinámica) de capitalización* es una función real, positiva y continua

$$F : \Re \times \Re^{+} \rightarrow [1,+\infty[\ ,$$

definida por:

$$(t,a) \mapsto F(t,a),$$

que cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo t, $F(t,0) = 1$.
2. Para todo t, $F(t,a)$ es estrictamente creciente con respecto a a.

En esta definición, $F(t,a)$ representa la cuantía en $t+a$, equivalente a 1 euro disponible en t. Se puede demostrar que, evidentemente, $F(t,a) \geq 1$.

Ejemplo 1. $F(t,a) = \exp\{(t+a)^{k} - t^{k}\}$, con $k > 0$, es una función dinámica de capitalización.

Definición 2. Una *función (dinámica) de descuento* es una función real, positiva y continua

$$F : \Re \times \Re^{+} \rightarrow]0,1],$$

definida por:

$$(t,a) \mapsto F(t,a),$$

que cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo t, $F(t,0) = 1$.
2. Para todo t, $F(t,a)$ es estrictamente decreciente con respecto a a.

En esta definición, $F(t,a)$ representa la cuantía en *t*, equivalente a 1 euro disponible en $t+a$. Se puede demostrar que, evidentemente, $0 < F(t,a) \leq 1$.

Ejemplo 2. $F(t,a) = \dfrac{1}{1+i[(t+a)^k - t^k]}$, con $i > 0$ y $k > 0$, es una función dinámica de descuento.

Si, en las definiciones anteriores, no se considera la variable *t*, tenemos los conceptos de función de capitalización y de descuento en un contexto estacionario.

Definición 3. Una *función (estacionaria) de capitalización* es una función real, positiva y continua

$$F : \Re^+ \to [1,+\infty[,$$

definida por:

$$a \mapsto F(a),$$

que cumple las siguientes condiciones:

1. $F(0) = 1$.
2. $F(a)$ es estrictamente creciente.

En esta definición, $F(a)$ representa la cuantía en *a*, equivalente a 1 euro disponible en el instante 0. Evidentemente, $F(a) \geq 1$.

Ejemplo 3. $F(a) = (1+i)^a$, con $i > 0$, es una función estacionaria de capitalización.

Definición 4. Una *función (estacionaria) de descuento* es una función real, positiva y continua

$$F : \Re^+ \to]0,1],$$

definida por:

$$a \mapsto F(a),$$

que cumple las siguiente condiciones:

1. $F(0) = 1$.
2. $F(a)$ es estrictamente decreciente.

En esta definición, $F(a)$ representa la cuantía en 0, equivalente a 1 euro disponible en el instante a. Evidentemente, se verifica que $0 < F(a) \leq 1$.

Ejemplo 4. $F(t,a) = 1 - da$, con $d > 0$, es una función estacionaria de descuento.

Observaciones:

1. Si, en lugar de determinar la cuantía equivalente a 1 euro, queremos obtener la cuantía equivalente a x euros, deberemos considerar $xF(t,a)$ ó $xF(a)$, dependiendo si la función es dinámica o estacionaria, respectivamente.
2. Es posible que las definiciones 1, 2, 3 y 4 se cumplan solamente para determinados valores de t y de a. Llamaremos *dominio temporal* de la función de capitalización o de descuento, denotado por *D*, al subconjunto de $\Re \times \Re^+$, formado por los pares (t,a), que satisfacen las condiciones 1 y 2 de la definición de la función de capitalización o de descuento respectivamente.

Ejemplo 5. El dominio temporal de la función de descuento del Ejemplo 4 es el intervalo semiabierto $D = [0,1/d[$.

2. Rentas

Desde ahora en adelante, nos referiremos a un *capital financiero* como un par ordenado (x,t), donde *x* representa la *cuantía* y *t* el *vencimiento* o *momento de disponibilidad* de la cuantía.

Definición 5. Una *renta* asociada al intervalo temporal $I = [t_0, t_n]$ es un conjunto finito o infinito, numerable o no numerable, de *n* capitales financieros, cada uno de ellos asociado a un subintervalo de *I*, de manera que los *n* subintervalos forman una partición del intervalo total.

Más concretamente, si $(x_1,t_1),(x_2,t_2),\ldots,(x_n,t_n)$ son los *n* capitales que componen una determinada renta, debe existir una correspondencia biunívoca con unos subintervalos $I_1,I_2,\ldots,I_n$.

$$(x_1,t_1)\leftrightarrow I_1,$$

$$(x_2,t_2)\leftrightarrow I_2,$$

$$\vdots$$

$$(x_n,t_n)\leftrightarrow I_n,$$

de manera que $\bigcup_{k=1}^{n} I_k = I$ y $I_r \cap I_s = \phi$, siempre que $r \neq s$.

Definición 6. Sea F_1 una función de capitalización y F_2 una función de descuento. Se llama *valor financiero* de la renta en el instante *t*, a la siguiente suma:

$$V_t := \sum_{k=1}^{n} x_k F(t,t_k),$$

siendo:

$$F(t,t_k) = \begin{cases} F_1(t,t_k - t), & \text{si} \quad t < t_k \\ F_2(t_k, t - t_k), & \text{si} \quad t \geq t_k \end{cases}$$

Observaciones:

1. Si $t = t_0$, al valor financiero se le denominará *valor actual* o *valor actualizado*.
2. Si $t = t_n$, al valor financiero se le denominará *valor final* o *valor capitalizado*.
3. Desde ahora en adelante, solamente utilizaremos la función de capitalización *exponencial* (o *compuesta*), definida en el Ejemplo 3, o la función de descuento *exponencial* (o *compuesto*), ambas en un contexto estacionario:

$$F(a) = (1+i)^{-a}, \text{ con } i > 0.$$

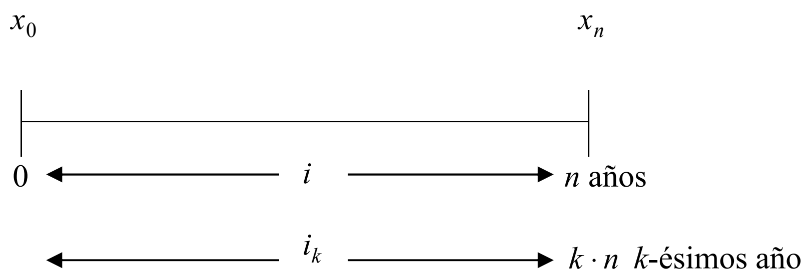
En las funciones de capitalización o de descuento, *i* representa el tanto anual de interés o de descuento, respectivamente.

2.1. Tantos fraccionados

Cuando el tiempo no viene expresado en años sino en fracciones de año (a las que llamaremos *k*-ésimos de año), el tanto o tipo de interés que se utiliza es i_k, donde el valor de *k* determina la frecuencia de cálculo de los intereses dentro de un año. De este modo,

- i_2 representa el tipo de interés semestral,
- i_3 representa el tipo de interés cuatrimestral,
- i_4 representa el tipo de interés trimestral,
- i_6 representa el tipo de interés bimensual,
- i_{12} representa el tipo de interés mensual,
- i_{360} representa el tipo de interés diario (año comercial), e
- i_{365} representa el tipo de interés diario (año natural).

En una operación financiera, el tanto debe ir expresado en la frecuencia que se utilice para medir el tiempo, es decir, que cuando el tiempo se exprese en *k*-ésimos de año, se ha de calcular un nuevo tanto i_k.



De este modo, dado que en capitalización simple ha de verificarse la siguiente igualdad:

$$x_0(1 + i \cdot n) = x_0(1 + i_k \cdot n \cdot k),$$

- el tanto aplicable al *k*-ésimo de año (i_k) se deduce a partir del tanto anual (i) del siguiente modo:

$$i_k = \frac{i}{k},$$

- mientras que, recíprocamente, el cálculo del tanto anual (i) en función del tanto por *k*-ésimo de año (i_k) se calcula como se muestra a continuación:

$$i = k \cdot i_k \,.$$

Análogamente, en capitalización compuesta, partimos de la siguiente igualdad:

$$x_0(1+i)^n = x_0(1+i_k)^{n \cdot k} \,,$$

de la que puede despejarse:

- el tanto por *k*-ésimo de año (i_k), que tiene la siguiente expresión:

$$i_k = (1+i)^{1/k} - 1 \,,$$

- y el tanto anual (i) en función del tanto por *k*-ésimo de año (i_k), como se muestra a continuación:

$$i = (1+i_k)^k - 1 \,.$$

A modo de nota, es necesario añadir que en la práctica bancaria se utiliza la fórmula de la capitalización simple $(i = k \cdot i_k)$ en el marco de la capitalización compuesta para calcular el tanto anual. El tanto obtenido con esta práctica recibe el nombre de tanto *nominal anual convertible* o *pagadero* por *k*-ésimo de año (denotado por j_k en vez de *i*) y, por tanto, satisface la siguiente expresión:

$$j_k = k \cdot i_k \,.$$

2.2. Otras modalidades del tanto

Llegados a este punto, se hace necesario distinguir entre los diferentes tantos, o tipos de interés, utilizados en la práctica empresarial. Para simplificar la exposición, nos referiremos únicamente a los tipos de interés. Para ello, se señalan los tres tipos de interés más comunes y se analiza su cálculo en función de las variables que afectan a cada uno de ellos.

- Por un lado, el tipo de interés real, i_r, es el tipo de interés en unidades monetarias constantes (no recoge la inflación) y representa el crecimiento del poder adquisitivo de los ingresos por intereses.
- El tipo de interés *libre de riesgo*, i_l, es el tipo de interés en unidades monetarias corrientes, es decir, que recoge la inflación y suele identificarse con el ofrecido por los instrumentos de Deuda del Estado. De este modo, el tipo de interés libre de riesgo se calcula a partir del tipo de interés real y de la tasa de inflación (*f*), del siguiente modo:

$$(1+i_l)=(1+i_r)(1+f).$$

- Finalmente, el tipo de interés *nominal* (i_n) es el tipo de interés acordado contractualmente cuando se pacta una operación financiera. El tanto nominal simboliza la tasa que el inversor va a exigir a cambio de su dinero que incluye el tipo de interés real (i_r) más la inflación (f), así como el riesgo de la inversión o prima de riesgo (p_r). En este sentido, la metodología más ampliamente utilizada para incorporar dicha prima al tipo de interés libre de riesgo (i_l) es el modelo sumativo que se implementa como se muestra a continuación:

$$i_n=i_l+p_r.$$

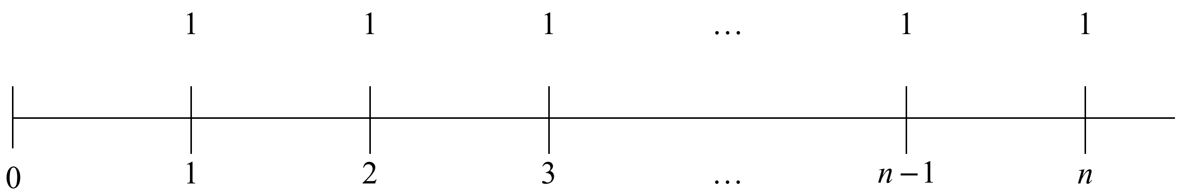
  Además de esta metodología, para introducir el riesgo en el tipo de interés, existen otras como el modelo multiplicativo o el uso de un divisor. En el Tema 2 de este libro se hace especial hincapié en los métodos tradicionales para introducir el riesgo en la valoración de rentas cuyos flujos de caja son capitales financiero-aleatorios.

De este modo, en presencia de la tasa de inflación $(f>0)$ y de la prima de riesgo $(p_r>0)$, se verifica que:

$$i_n>i_l>i_r.$$

2.3. Valor actual de una renta unitaria, temporal y pospagable

En esta sección, vamos a introducir casos particulares de valor actual y final de una renta. En primer lugar, vamos a calcular el valor actual de una renta unitaria, temporal y pospagable, de n términos y valorada al tanto i, que se simboliza por $a_{\overline{n|}i}$. La representación gráfica de dicha renta es:



El valor actual satisface la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$f(n+1) - f(n) = (1+i)^{-n-1}, \tag{1}$$

donde hemos hecho $f(n) := a_{\overline{n|}i}$. En efecto, la diferencia entre ambas expresiones en la ecuación (1) es igual al valor del último término de la renta descontado $n+1$ períodos, siendo la condición inicial:

$$f(0) = 0\,.$$

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$f_h(n) = A\,,$$

siendo A una constante, mientras que una solución particular de la ecuación completa es de la forma:

$$f_c(n) = B(1+i)^{-n-1},$$

siendo también B una constante. Para determinar B, se sustituye $f_c(n)$ en la expresión (1), obteniéndose:

$$B(1+i)^{-n-2} - B(1+i)^{-n-1} = (1+i)^{-n-1}\,.$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por $(1+i)^{n+2}$, nos quedaría:

$$B(1-1-i)=1+i,$$

de donde:

$$B=-\frac{1+i}{i}.$$

Por tanto,

$$f(n)=f_h(n)+f_c(n)=A-\frac{(1+i)^{-n}}{i}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $f(0)=0$,

$$A-\frac{1}{i}=0,$$

de donde:

$$A=\frac{1}{i}.$$

En definitiva,

$$a_{\overline{n|}i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \quad (2)$$

Consecuencias. De la expresión (2), pueden deducirse las siguientes consecuencias:

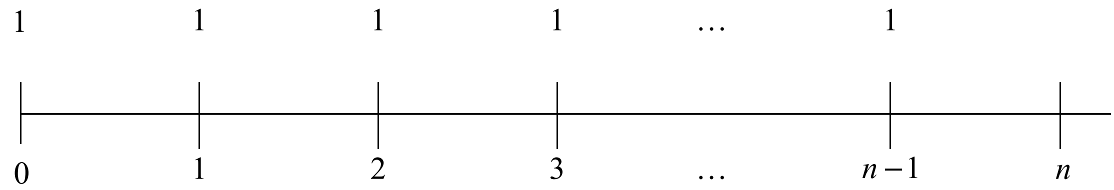
1. El valor final de una renta unitaria, temporal y pospagable, de *n* términos y valorada al tanto *i*, se representa por $s_{\overline{n|}i}$. Teniendo en cuenta que

   $$s_{\overline{n|}i}=(1+i)^n a_{\overline{n|}i},$$

   se puede demostrar fácilmente que:

   $$s_{\overline{n|}i}=\frac{(1+i)^n-1}{i}. \quad (3)$$

2. El valor actual de una renta unitaria, temporal y prepagable, de n términos y valorada al tanto i, se simboliza por $\ddot{a}_{\overline{n|}i}$. La representación gráfica de dicha renta es:



Teniendo en cuenta que

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = (1+i)a_{\overline{n|}i},$$

se tiene evidentemente que:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = (1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{4}$$

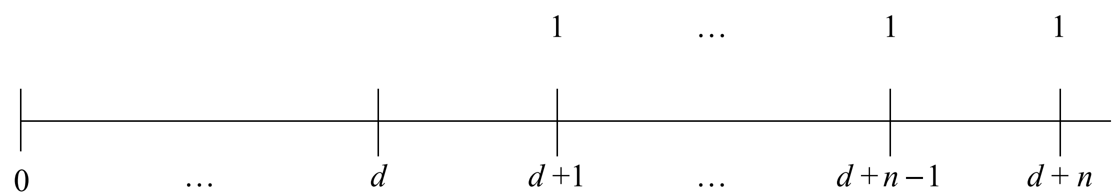
3. El valor final de una renta unitaria, temporal y prepagable, de n términos y valorada al tanto i, se representa por $\ddot{s}_{\overline{n|}i}$. Teniendo en cuenta que

$$\ddot{s}_{\overline{n|}i} = (1+i)s_{\overline{n|}i},$$

se tiene evidentemente que:

$$\ddot{s}_{\overline{n|}i} = (1+i)\frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \tag{5}$$

4. El valor actual de una renta unitaria, temporal y pospagable, de n términos y valorada al tanto i, diferida d períodos, se simboliza por $d/a_{\overline{n|}i}$. La representación gráfica de dicha renta es:



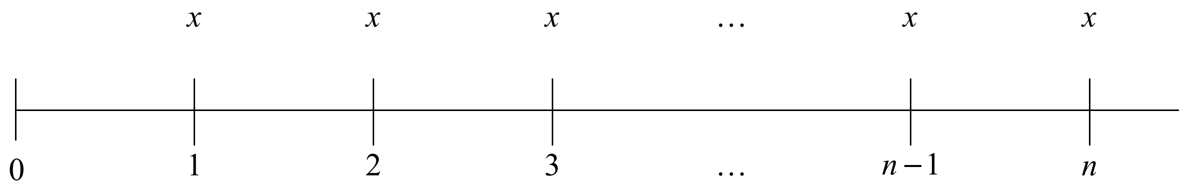
Teniendo en cuenta que

$$d\,/\,a_{\overline{n|}\,i} = (1+i)^{-d}\,a_{\overline{n|}\,i},$$

se tiene evidentemente que:

$$d\,/\,a_{\overline{n|}\,i} = (1+i)^{-d}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{6}$$

5. El valor actual de una renta constante de cuantía x, temporal y pospagable, de n términos y valorada al tanto i, se simboliza por $(V_a)_{\overline{n|}\,i}$. La representación gráfica de dicha renta es:



Se puede demostrar que:

$$(V_a)_{\overline{n|}\,i} = x \cdot a_{\overline{n|}\,i},$$

es decir:

$$(V_a)_{\overline{n|}\,i} = x\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{7}$$

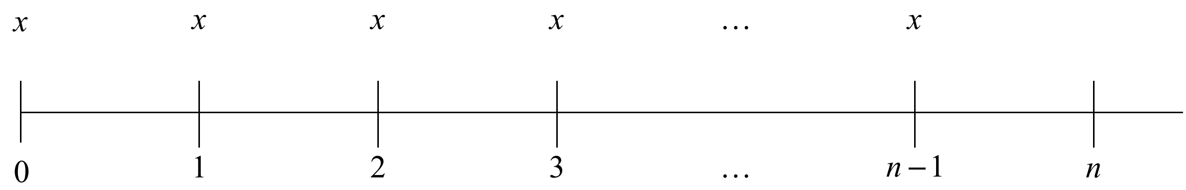
6. El valor final de una renta constante de cuantía x, temporal y pospagable, de n términos y valorada al tanto i, se representa por $(V_s)_{\overline{n|}\,i}$. Se puede demostrar que:

$$(V_s)_{\overline{n|}\,i} = x \cdot s_{\overline{n|}\,i},$$

es decir:

$$(V_s)_{\overline{n|}\,i} = x\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \tag{8}$$

7. El valor actual de una renta constante de cuantía x, temporal y prepagable, de n términos y valorada al tanto i, se simboliza por $(\ddot{V}_a)_{\overline{n|}\,i}$. La representación gráfica de dicha renta es:



Teniendo en cuenta que

$$(\ddot{V}_a)_{\overline{n|}\,i} = x \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}\,i},$$

se tiene evidentemente que:

$$(\ddot{V}_a)_{\overline{n|}\,i} = x(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{9}$$

8. El valor final de una renta constante de cuantía x, temporal y prepagable, de n términos y valorada al tanto i, se representa por $(\ddot{V}_s)_{\overline{n|}\,i}$. Teniendo en cuenta que

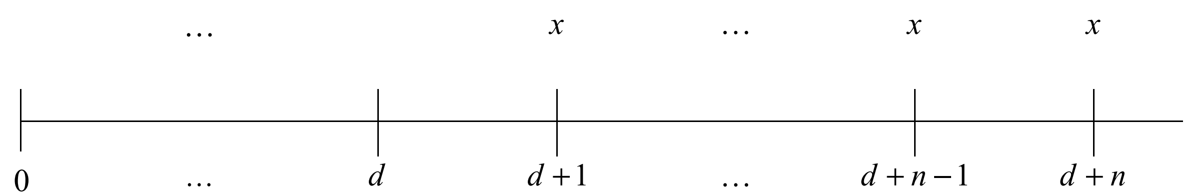
$$(\ddot{V}_s)_{\overline{n|}\,i} = x \cdot \ddot{s}_{\overline{n|}\,i},$$

se tiene evidentemente que:

$$(\ddot{V}_s)_{\overline{n|}\,i} = x(1+i)\frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \tag{10}$$

9. El valor actual de una renta constante de cuantía x, temporal y pospagable, de n términos y valorada al tanto i, diferida d períodos, se simboliza por $d\,/(V_a)_{\overline{n|}\,i}$.

La representación gráfica de dicha renta es:



Teniendo en cuenta que

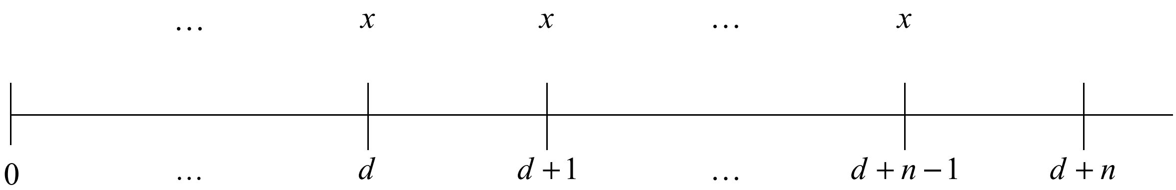
$$d\,/(V_a)_{\overline{n|}\,i} = x \cdot d\,/\,a_{\overline{n|}\,i},$$

se tiene evidentemente que:

$$d/(V_a)_{\overline{n|}\,i} = x(1+i)^{-d}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{11}$$

10. El valor actual de una renta constante de cuantía x, temporal y prepagable, de n términos y valorada al tanto i, diferida d períodos, se simboliza por $d/(\ddot{V}_a)_{\overline{n|}\,i}$.

    La representación gráfica de dicha renta es:



Teniendo en cuenta que

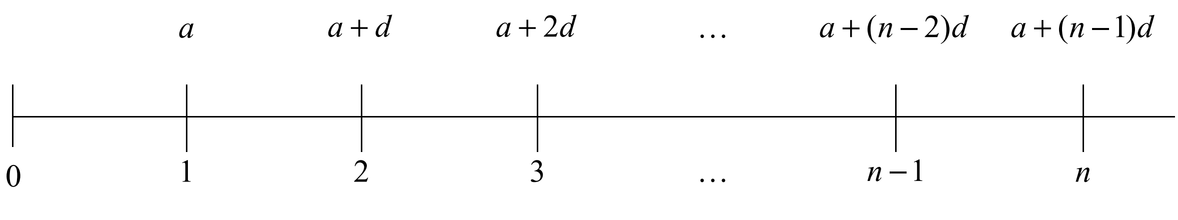
$$d/(\ddot{V}_a)_{\overline{n|}\,i} = x \cdot d/\ddot{a}_{\overline{n|}\,i},$$

se tiene evidentemente que:

$$d/(\ddot{V}_a)_{\overline{n|}\,i} = x(1+i)^{-d+1}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{12}$$

2.4. Valor actual de una renta variable en progresión aritmética, temporal y pospagable

El valor actual de una renta temporal y pospagable, variable en progresión aritmética, de primer término a y diferencia d, de n términos y valorada al tanto i, se simboliza por $A(a,d)_{\overline{n|}\,i}$. La representación gráfica de dicha renta es:



El valor actual satisface la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$f(n+1) - f(n) = (a+dn)(1+i)^{-n-1}. \qquad (13)$$

En efecto, la diferencia entre ambas expresiones en la ecuación (13) es igual al valor del último término de la renta descontado $n+1$ períodos, con la condición inicial

$$f(0) = 0.$$

Como sabemos, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$f_h(n) = A,$$

siendo *A* una constante, mientras que una solución particular de la ecuación completa es ahora de la forma:

$$f_c(n) = (B+Cn)(1+i)^{-n-1},$$

siendo también *B* y *C* dos constantes. Para calcular *B* y *C*, se sustituye $f_c(n)$ en la expresión (13), obteniéndose:

$$(B+Cn+C)(1+i)^{-n-2} - (B+Cn)(1+i)^{-n-1} = (a+dn)(1+i)^{-n-1}.$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por $(1+i)^{n+2}$, nos quedaría:

$$(B+Cn+C) - (B+Cn)(1+i) = (a+dn)(1+i),$$

de donde, igualando los términos independientes de *n,* por un lado, y los coeficientes de primer grado, por otro, tenemos:

$$B + C - B(1+i) = a(1+i)$$

y

$$C - C(1+i) = d(1+i).$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, nos queda que:

$$B = -\frac{a(1+i)}{i} - \frac{d(1+i)}{i^2}$$

y

$$C = -\frac{d(1+i)}{i}.$$

Por tanto,

$$f(n) = f_h(n) + f_c(n) = A - \left[\frac{a(1+i)}{i} + \frac{d(1+i)}{i^2} + \frac{d(1+i)}{i} n\right](1+i)^{-n-1}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, se tiene que:

$$A - \left[\frac{a(1+i)}{i} + \frac{d(1+i)}{i^2}\right](1+i)^{-1} = 0,$$

de donde:

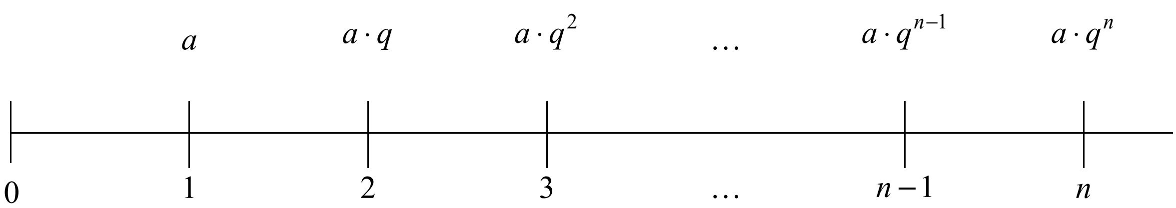
$$A = \frac{a}{i} + \frac{d}{i^2}.$$

En definitiva,

$$A(a,d)_{\overline{n|}i} = \left(a + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n|}i} - \frac{dn(1+i)^{-n}}{i}. \tag{14}$$

2.5. Valor actual de una renta variable en progresión geométrica, temporal y pospagable

El valor actual de una renta temporal y pospagable, variable en progresión geométrica, de primer término *a* y razón *q*, de *n* términos y valorada al tanto *i*, se simboliza por $A(a,q)_{\overline{n|}i}$. La representación gráfica de dicha renta es:



El valor actual satisface la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$f(n+1)-f(n)=aq^n(1+i)^{-n-1}=\frac{a}{q}\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-n-1}. \tag{15}$$

En efecto, la diferencia entre ambas expresiones en la ecuación (15) es igual al valor del último término de la renta descontado $n+1$ períodos, con la condición inicial:

$$f(0)=0.$$

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$f_h(n)=A,$$

siendo *A* una constante, mientras que una solución particular de la ecuación completa es de la forma:

$$f_c(n)=B\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-n},$$

siendo también *B* una constante. Para determinar *B*, se sustituye $f_c(n)$ en la ecuación (15), obteniéndose:

$$B\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-n-1}-B\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-n}=\frac{a}{q}\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-n-1}.$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por $(1+i)^{n+1}$, nos quedaría:

$$B-B\frac{1+i}{q}=\frac{a}{q},$$

de donde:

$$B=-\frac{a}{1+i-q}.$$

Por tanto,

$$f(n)=f_h(n)+f_c(n)=A-\frac{a}{1+i-q}\left(\frac{1+i}{q}\right)^{-n}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $f(0)=0$, se tiene que:

$$A-\frac{a}{1+i-q}=0,$$

de donde:

$$A=\frac{a}{1+i-q}.$$

En definitiva,

$$A(a,q)_{\overline{n|}\,i}=\frac{a}{1+i-q}\left[1-\left(\frac{q}{1+i}\right)^{n}\right]. \tag{16}$$

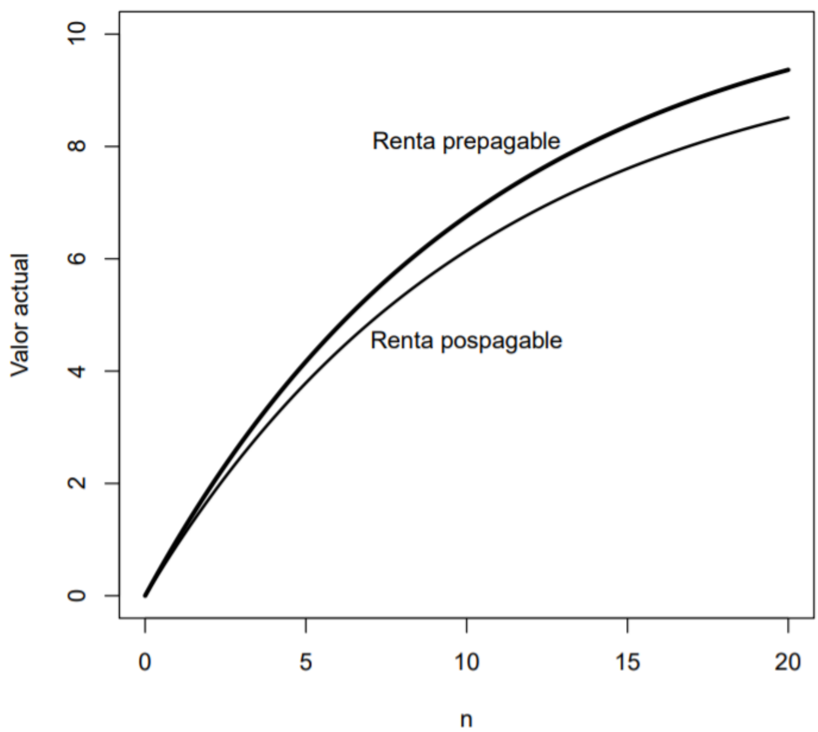


Figura 1. Valor actual la renta pospagable y prepagable en función de *n*.

3. Operaciones de amortización

Los sistemas de amortización tradicionales como el americano, el método de cuotas de amortización constantes y el método francés de amortización han sido ampliamente estudiados desde un punto de vista académico, así como son conocidos y comúnmente implementados en la práctica empresarial. Sin embargo, existen otros métodos más novedosos, como el sistema de cuotas de amortización variables en progresión geométrica y el de cuotas de amortización variables en progresión aritmética, la amortización de préstamos a través del descuento lineal y la amortización de préstamos con tasa de interés del 0% y comisiones iniciales, que también han sido empleados en la práctica financiera y cuyo funcionamiento es analizado a continuación. Para finalizar, en el último subapartado se estiman las magnitudes de los denominados préstamos flexibles.

3.1. Sistema de cuotas de amortización variables en progresión aritmética

En este caso, las cuotas de amortización del principal siguen una progresión aritmética cuyo primer término es *A* y cuya diferencia es *d*:

- $A_1 = A$,
- $A_2 = A + d$,
- $A_3 = A + 2d$,

  $\vdots$
- $A_n = A + (n-1)d$.

Vamos a analizar la estructura de los términos amortizativos.

- $a_1 = A + C_0 i$,
- $a_2 = (A + d) + (C_0 - A)i$

$= (A + C_0 i) + (d - Ai)$

$= a_1 + d - Ai$,

- $a_3 = (A + 2d) + (C_0 - 2A - d)i$

  $= a_2 + d - (A + d)i$

  $= a_2 + d - A_2 i$,

- $a_4 = (A + 3d) + (C_0 - 3A - 3d)i$

  $= a_3 + d - (A + 2d)i$

  $= a_3 + d - A_3 i$,

  $\vdots$

- En general, $a_s = a_{s-1} + d - A_{s-1} i$.

Esta serie es una progresión aritmética de segundo orden. En efecto,

- $d_{k-1} := a_k - a_{k-1} = d - A_{k-1} i$, y
- $d_k := a_{k+1} - a_k = d - A_k i$.

Por consiguiente, $d_k - d_{k-1} = -di$. La solución general de una progresión aritmética de segundo orden es:

$$a_s = \frac{r}{2} s^2 + \left(d_1 - \frac{3r}{2} \right) s + (r - d_1 + a_1), \tag{17}$$

siendo r la diferencia común de di. Aplicando la expresión (4) a nuestro caso concreto, el término amortizativo quedaría del siguiente modo:

$$a_s = -\frac{di}{2} s^2 + \left(d - Ai + \frac{3di}{2} \right) s + (-di - d + Ai + A + C_0 i). \tag{18}$$

El capital pendiente de amortizar en el instante s es:

$$C_s = C_0 - sA - \frac{(1 + s - 1)(s - 1)}{2} d = C_0 - sA - \frac{s(s-1)}{2} d.$$

Por lo tanto, la estructura de la cuota de interés es la siguiente:

$$I_s = C_{s-1} i = \left[C_0 - (s-1)A - \frac{(s-1)(s-2)}{2} d \right] i$$

$$= C_0 i - (n-1)Ai - \frac{di}{2}(n^2 - 3n + 2)$$

$$= -\frac{di}{2}n^2 + \left(-Ai + \frac{3di}{2}\right)n + (C_0 i + Ai - di).$$

Obsérvese que $a_s = A_s + I_s$. Finalmente, en la Tabla 1 se muestra el cuadro de amortización de este tipo de préstamos.

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	C_0
1	$a_1 = A + C_0 i$	$I_1 = C_0 i_1$	$A_1 = A$	$C_1 = C_0 - A$
2	$a_2 = a_1 + d - Ai$	$I_2 = C_1 i_2$	$A_2 = A + d$	$C_2 = C_0 - A - d$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_n = a_{n-1} + d - A_{n-1} i$	$I_n = C_{n-1} i_n$	$A_n = A + (n-1)d$	$C_n = 0$

Tabla 1. Cuadro de amortización de un préstamo con cuota de amortización en progresión aritmética.

3.2. Sistema de cuotas de amortización variables en progresión geométrica

En este caso, las cuotas de amortización del principal siguen una progresión geométrica cuyo primer término es *A* y cuya razón es *r*:

- $A_1 = A$,
- $A_2 = Ar$,
- $A_3 = Ar^2$,

  $\vdots$
- $A_n = Ar^{n-1}$.

Vamos a analizar la estructura de los términos amortizativos:

- $a_1 = A + C_0 i$,
- $a_2 = Ar + (C_0 - A)i$

  $= Ar + C_0 ir - C_0 ir + (C_0 - A)i$

  $= a_1 r + (C_0 - A - C_0 r)i$,
- $a_3 = Ar^2 + (C_0 - A - Ar)i$

  $= Ar^2 + (C_0 - A)ir - (C_0 - A)ir + (C_0 - A - Ar)i$

  $= a_2 r + (C_0 - A - C_0 r)i$,
- $a_4 = Ar^3 + (C_0 - A - Ar - Ar^2)i$

  $= Ar^3 + (C_0 - A - Ar)ir - (C_0 - A - Ar)ir + (C_0 - A - Ar - Ar^2)i$

  $= a_3 r + (C_0 - A - C_0 r)i$,

  $\vdots$
- En general, $a_s = a_{s-1} r + (C_0 - A - C_0 r)i$.

Esta serie es una secuencia aritmético-geométrica cuya solución general es:

$$a_s = a_1 r^{s-1} + d\frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}. \tag{19}$$

donde r es la razón y d es la diferencia de la progresión. Aplicando la expresión (19) a nuestro caso en concreto, el término amortizativo quedaría:

$$\begin{aligned} a_s &= (A + C_0 i) r^{n-1} + (C_0 - A - C_0 r) i \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} \\ &= (A + C_0 i) r^{n-1} + C_0 i (1 - r^{n-1}) - Ai\frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} \\ &= Ar^{n-1} + C_0 i - Ai\frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}. \end{aligned} \tag{20}$$

El capital pendiente de amortizar en el instante s es:

$$C_s = C_0 - \sum_{k=1}^{s} A_k = C_0 - A\frac{1 - r^s}{1 - r}.$$

Por tanto, la estructura de la cuota de interés es la siguiente:

$$I_s = C_{s-1}i = \left(C_0 - A\frac{1-r^{s-1}}{1-r} \right) i$$

$$= C_0 i - A\frac{1-r^{s-1}}{1-r} i \, .$$

Tal y como se esperaba, se verifica que $a_s = A_s + I_s$. Finalmente, en la Tabla 2 se muestra el cuadro de amortización de este tipo de préstamos.

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	C_0
1	$a_1 = A + C_0 i$	$I_1 = C_0 i_1$	$A_1 = A$	$C_1 = C_0 - A$
2	$a_2 = a_1 r + (C_0 - A - C_0 r)i$	$I_2 = C_1 i_2$	$A_2 = Ar$	$C_2 = C_0 - A - A$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$a_n = a_{n-1} r + (C_0 - A - C_0 r)i$	$I_n = C_{n-1} i_n$	$A_n = Ar^{n-1}$	$C_n = 0$

Tabla 2. Cuadro de amortización de un préstamo con cuotas de amortización en progresión geométrica.

3.3. Amortización de préstamos con el descuento lineal

El cuadro de amortización de un préstamo utilizando el descuento lineal como función de descuento subyacente es representado en la Tabla 3. Téngase en cuenta que los intereses siempre se calculan sobre el principal del préstamo.

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	C_0
1	$C_0\left(\frac{1}{n}+i\right)$	$C_0 i$	$\frac{C_0}{n}$	$\frac{n-1}{n}C_0$
2	$C_0\left(\frac{1}{n}+i\right)$	$C_0 i$	$\frac{C_0}{n}$	$\frac{n-2}{n}C_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$C_0\left(\frac{1}{n}+i\right)$	$C_0 i$	$\frac{C_0}{n}$	0

Tabla 3. Cuadro de amortización de un préstamo con el descuento lineal.

Obsérvese que este cuadro de amortización es una combinación de:

- El sistema de amortización americano, ya que todas las cuotas de interés (I_s) son constantes e iguales a $C_0 i$.
- El método de amortización de cuotas constantes, ya que todos los reembolsos de capital (A_s) son constantes e iguales a $\frac{C_0}{n}$.
- El método de amortización francés, ya que todas las cuotas de amortización (indicadas por a_s) son constantes e iguales a $C_0\left(\frac{1}{n}+i\right)$.

Como consecuencia, el principal pendiente de amortizar (C_s) sigue una progresión aritmética decreciente de diferencia $\frac{C_0}{n}$. La tasa de interés equivalente en capitalización compuesta resulta de la siguiente ecuación:

$$C_0 = G_0 + \left(\frac{C_0}{n} + C_0 i^*\right) a_{\overline{n}|i^*},$$

es decir,

$$C_0 = G_0 + \left(\frac{C_0}{n} + C_0 i^* \right) \frac{1-(1+i^*)^{-n}}{i^*}.$$

Ejemplo 6. Consideremos un préstamo con las siguientes características:

- $C_0 = 50.000€$.
- $G_0 = 2.000€$.
- n = 5 años.
- i = 7%.

El cuadro de amortización aparece detallado en la Tabla 4.

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	50.000
1	13.500	3.500	10.000	40.000
2	13.500	3.500	10.000	30.000
3	13.500	3.500	10.000	20.000
4	13.500	3.500	10.000	10.000
5	13.500	10.000	10.000	0

Tabla 4. Cuadro de amortización del préstamo del Ejemplo 6.

El tipo de interés equivalente puede obtenerse de la siguiente ecuación:

$$50.000 = 2.000 + 13.500 \frac{1-(1+i^*)^{-5}}{i^*},$$

de donde $i^* = 12{,}56\%$. Obsérvese que, dado que $a_{\overline{n}|i}$ es decreciente con respecto de *i*, se da la siguiente cadena de implicaciones:

$$i\uparrow \Rightarrow \frac{n(C_0 - G_0)}{C_0(1+in)} \downarrow \Rightarrow i^* \uparrow .$$

En efecto, sin considerar los tipos de interés iniciales (i = 0%), la tasa de interés real es $i^* = 10{,}92\%$, mientras que cuando se considera que i = 10%, el tipo de interés real es $i^* = 15{,}24\%$. Análogamente, si n es lo suficientemente grande, podemos afirmar que la tasa de interés real también es creciente con el tiempo. Así, en el préstamo anterior, para una duración de diez años, se tiene que $i^* = 11{,}03\%$.

Es importante poner de manifiesto que un préstamo amortizado utilizando el descuento lineal exhibe una tasa de interés real mucho más alta que i.

3.4. Amortización de préstamos con tasa de interés del 0% y comisiones iniciales

El cuadro de amortización de un préstamo con una tasa de interés del 0% y comisiones iniciales es el siguiente:

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	C_0
1	$\frac{C_0}{n}$	0	$\frac{C_0}{n}$	$\frac{n-1}{n}C_0$
2	$\frac{C_0}{n}$	0	$\frac{C_0}{n}$	$\frac{n-2}{n}C_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\frac{C_0}{n}$	0	$\frac{C_0}{n}$	0

Tabla 5. Cuadro de amortización de un préstamo con tipo de interés 0%.

Obsérvese que este cuadro de amortización es una combinación de:

- El método de amortización de cuotas constantes, ya que todas las cuotas (A_s) son iguales a $\frac{C_0}{n}$.
- Los préstamos con períodos de carencia de interés durante toda la vida del préstamo.
- El método de amortización francés ya que todos los pagos periódicos (a_s) son constantes e iguales a $\frac{C_0}{n}$.

Consecuentemente, el capital pendiente de amortizar (C_s) disminuye en progresión aritmética de diferencia $\frac{C_0}{n}$. En caso de que existan comisiones iniciales, denotadas por G_0, la tasa de interés equivalente resulta de la siguiente ecuación:

$$C_0 = G_0 + \frac{C_0}{n} a_{\overline{n}|i^*} .$$

es decir,

$$C_0 = G_0 + \frac{C_0}{n} \frac{1-(1+i^*)^{-n}}{i^*} .$$

Ejemplo 7. Consideremos los datos del préstamo del Ejemplo 6. En este caso, el cuadro de amortización quedaría como se muestra en la Tabla 6.

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	50.000
1	10.000	0	10.000	40.000
2	10.000	0	10.000	30.000
3	10.000	0	10.000	20.000
4	10.000	0	10.000	10.000
5	10.000	0	10.000	0

Tabla 6. Cuadro de amortización del préstamo del Ejemplo 6.

El tipo de interés equivalente se calcula mediante la ecuación de equivalencia financiera que iguala las cantidades realmente pagadas y recibidas por el prestatario:

$$50.000 = 2.000 + 10.000\frac{1-(1+i^*)^{-5}}{i^*},$$

de donde se deduce que $i^* = 1{,}38\%$. Obsérvese que, como $a_{\overline{n}|i}$ es decreciente con respecto a *i*, se dan las siguientes implicaciones:

$$G_0 \uparrow \Rightarrow C_0 - G_0 \downarrow \Rightarrow i^* \uparrow .$$

3.5. Préstamos flexibles

Los préstamos flexibles son aquéllos que se ofertan por las instituciones financieras con objeto de adaptarse a las necesidades individuales de sus clientes. Los préstamos flexibles son aplicables independientemente del método utilizado para la amortización del principal (método de amortización francés, sistema americano, método de amortización de cuotas constantes, etc.). Los principales tipos de préstamos flexibles que ofertan los bancos españoles presentan las siguientes variantes:

- Elegir un porcentaje del principal del préstamo que se amortizará en un determinado instante de la vida de la operación.
- Elegir una mensualidad constante (dentro de un cierto rango) cuando el tipo de interés del préstamo es variable. Esta metodología transfiere la incertidumbre de usar un tipo de interés variable a la duración del operación.
- Diferir algunos pagos mensuales hasta el final la vida del préstamo, momento a partir del cual no se permitirán más aplazamientos.

En los siguientes epígrafes se estudian cada una de las posibilidades anteriormente mencionadas.

3.5.1. Préstamos con carencia parcial de amortización

En esta variante de préstamo, el prestatario tiene la posibilidad de posponer la amortización de un porcentaje (α) del principal (C_0) hasta el final de la vida del préstamo (n). El objetivo de este tipo de préstamo es que, durante los primeros años, las cuotas mensuales sean menores. Por lo tanto, este préstamo puede ser recomendable cuando se espera una liquidez insuficiente durante los primeros años para amortizar la totalidad del principal.

Discrecionalmente, el banco puede ofrecer la posibilidad de renegociar la cuota final, aumentando tanto el plazo de la hipoteca como la tasa de interés.

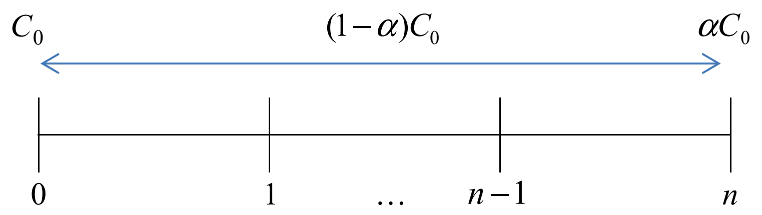


Figura 2. Distribución temporal de las cuantías amortizadas.

El término amortizativo del préstamo puede calcularse a partir de la expresión general del capital pendiente de amortizar en el instante $n-1$, calculado por el método retrospectivo:

$$C_{n-1} = C_0(1+i)^{n-1} - a \cdot s_{\overline{n-1|}\,i} \quad .$$

Como, en este caso, el capital vivo en el instante $n-1$ es αC_0, tenemos que:

$$\alpha C_0 = C_0(1+i)^{n-1} - a \cdot s_{\overline{n-1|}\,i},$$

de donde se obtiene que:

$$a = \frac{C_0[(1+i)^{n-1} - \alpha]}{s_{\overline{n-1|}\,i}}.$$

A continuación, en la Tabla 7 se muestra el cuadro de amortización de este tipo de préstamo.

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	C_0
1	a_1	$I_1 = C_0 i_1$	A_1	$C_1 = (n-1)A$
2	a_2	$I_2 = C_1 i_2$	$A_2 = A_1(1+i)$	$C_2 = (n-2)A$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
n	a_n	$I_n = C_{n-1} i_n$	$A_n = \alpha C_0$	$C_n = 0$

Tabla 7. Cuadro de amortización del préstamo con carencia parcial de amortización.

Este préstamo puede interpretarse como la combinación de un préstamo de amortización francés con un principal $(1-\alpha)C_0$ que se amortizará en $n-1$ períodos, y un préstamo de amortización americano de principal αC_0 que se amortizará en n períodos.

Ejemplo 8. Consideremos un préstamo cuyo principal es de 100.000 €, amortizable a una tasa de interés constante del 5% durante 12 años (por simplicidad, consideraremos pagos anuales). Este préstamo incluye la opción de amortizar al final el 25% del principal del préstamo. A continuación, en la Tabla 8, se presenta su cuadro de amortización.

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	100.000,00
1	10.279,17	5.000,00	5.279,17	94.720,83
2	10.279,17	4.736,04	5.543,13	89.177,71
3	10.279,17	4.458,89	5.820,28	83.357,43
4	10.279,17	4.167,87	6.111,30	77.246,13
5	10.279,17	3.862,31	6.416,86	70.829,27
6	10.279,17	3.541,46	6.737,70	64.091,57
7	10.279,17	3.204,58	7.074,59	57.016,98
8	10.279,17	2.850,85	7.428,32	49.588,66
9	10.279,17	2.479,43	7.799,73	41.788,93
10	10.279,17	2.089,45	8.189,72	33.599,21
11	10.279,17	1.679,96	8.599,21	25.000,00
12	26.250,00	1.250,00	**25.000,00**	0,00

Tabla 8. Cuadro de amortización de un préstamo con carencia parcial de amortización.

Para observar más claramente la evolución de la amortización en este tipo de préstamo, en la Figura 3 se muestra la secuencia de las cuotas de amortización.

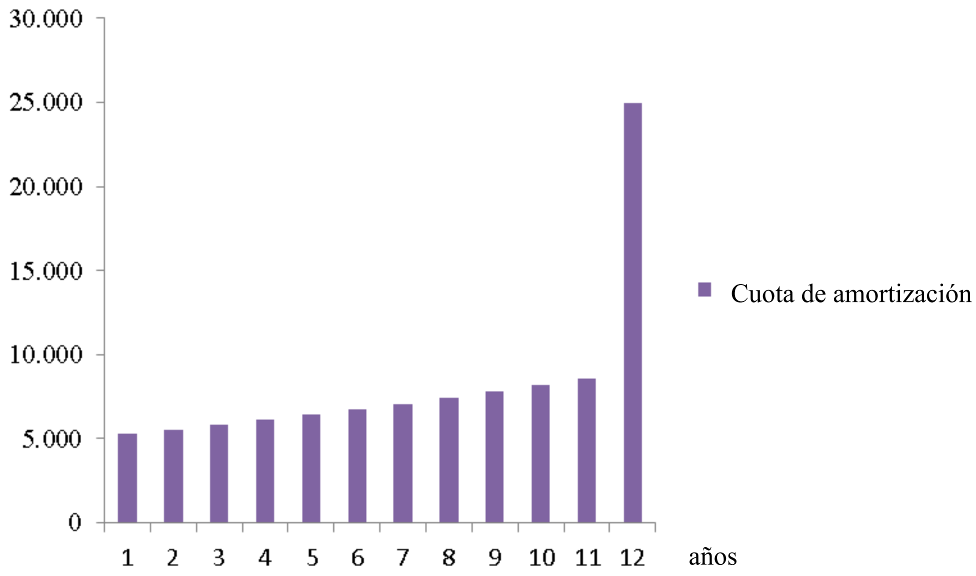


Figura 3. Evolución de la cuota de amortización de un préstamo con carencia parcial de amortización.

3.5.2. Préstamos con tipo de interés variable y términos amortizativos constantes

En este tipo de préstamo, el tipo de interés es variable, pero los términos amortizativos permanecen constantes durante toda la vida de la operación. Es decir, el prestatario siempre paga la misma cuantía, independientemente de los cambios en el tipo de interés, lo que obviamente afectará a la duración del préstamo.

De esta manera, el prestatario debe elegir la cuantía del término amortizativo que debe ser mayor que la cuota de interés en cada período. Cuanto menor sea la cantidad que elija el prestatario, mayor será la duración del préstamo y, por esta razón, es usual que la entidad bancaria fije la duración máxima que está dispuesta a asumir o, lo que es equivalente, fije el término amortizativo mínimo a pagar por el prestatario. Por otro lado, si el término amortizativo elegido es mayor que el inicialmente calculado, la duración del préstamo se acortará.

En este tipo de préstamo, la incertidumbre de los tipos de interés se transfiere a la duración del préstamo. De esta manera, un aumento (disminución) de los tipos de interés conducirá a una mayor (menor) duración del préstamo.

El término amortizativo se podría calcular a partir del tipo de interés correspondiente al primer período (i) de la siguiente manera:

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}}.$$

Esta cuantía se puede usar durante los n años de duración del préstamo. Suponiendo que el tipo de interés aumente a un porcentaje acumulado constante (α) con respecto al tipo de interés considerado originalmente:

$$(1+i_k) = (1+i_{k-1})(1+\alpha),$$

el término amortizativo calculado previamente no sería suficiente para pagar el principal del préstamo. En este caso, podría considerarse que los términos amortizativos varían en progresión geométrica de razón $(1+\alpha)^{-1}$. Por tanto, el principal del préstamo (C_0) se puede calcular como la suma de una progresión geométrica, resultando:

$$C_0 = A(a,(1+\alpha)^{-1})_{\overline{n+k}|i} = a\,\frac{1-\left(\dfrac{(1+\alpha)^{-1}}{(1+i)}\right)^{n+k}}{(1+i)-(1+\alpha)^{-1}},$$

siendo k el tiempo en que se incrementará la duración del préstamo. Como, por otra parte, se tiene que $C_0 = a \cdot a_{\overline{n}|i}$, entonces:

$$k = -\frac{\log\left[1 - a_{\overline{n}|i}\,\dfrac{(1+i)(1+\alpha)-1}{1+\alpha}\right]}{\log\left[(1+\alpha)(1+i)\right]} - n.$$

Obviamente, en el caso de que el prestatario, en cualquier momento de la operación, decida modificar la cuantía del término amortizativo, la duración de la misma se verá afectada.

Ejemplo 9. Consideremos un préstamo flexible con cuotas constantes y duración variable dependiendo de la variación del tipo de interés.

En el caso de que el préstamo, con un principal de 100.000 €, se contrate a un tipo de interés constante del 5% durante 10 años, el cuadro de amortización sería el que se muestra en la Tabla 9.

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	7.950,46
1	12.950,46	5.000,00	7.950,46	8.347,98
2	12.950,46	4.602,48	8.347,98	8.765,38
3	12.950,46	4.185,08	8.765,38	9.203,65
4	12.950,46	3.746,81	9.203,65	9.663,83
5	12.950,46	3.286,63	9.663,83	10.147,02
6	12.950,46	2.803,44	10.147,02	10.654,37
7	12.950,46	2.296,08	10.654,37	11.187,09
8	12.950,46	1.763,37	11.187,09	11.746,45
9	12.950,46	1.204,01	11.746,45	12.333,77
10	12.950,46	616,69	12.333,77	7.950,46

Tabla 9. Cuadro de amortización de un préstamo hipotecario con términos amortizativos y tipo de interés constante.

Sin embargo, el préstamo contratado permite un tipo de interés variable. Supongamos que el tipo de interés se incrementa en un 1,65% anual. Obsérvese que, en principio, esto no debe afectar a la cuantía del término amortizativo, ya que la incertidumbre del tipo de interés se transfiere a la duración del préstamo. En este caso, podemos calcular el incremento (k) de la duración del préstamo de la siguiente manera:

$$k = -\frac{\log\left[1 - a_{\overline{n}|i}\frac{(1+i)(1+\alpha)-1}{1+\alpha}\right]}{\log[(1+\alpha)(1+i)]} - n = 1{,}0029\,.$$

Así, la nueva duración del préstamo es $n + k = 10 + 1{,}0029 = 11{,}0029$ años. El cuadro de amortización se presenta en la Tabla 10.

Período	Término amortizativo a_s	Cuota de interés I_s	Cuota de amortización A_s	Capital pendiente C_s
0	-	-	-	100.000,00
1	13.108,15	5.250,00	7.858,15	92.141,85
2	13.108,15	5.322,34	7.785,81	84.356,04
3	13.108,15	4.872,61	8.235,54	76.120,50
4	13.108,15	4.396,91	8.711,24	67.409,25
5	13.108,15	3.893,72	9.214,43	58.194,82
6	13.108,15	3.361,48	9.746,68	48.448,15
7	13.108,15	2.798,48	10.309,67	38.138,48
8	13.108,15	2.202,97	10.905,18	27.233,30
9	13.108,15	1.573,06	11.535,09	15.698,21
10	13.108,15	906,77	12.201,38	3.496,83
11	3,698.81	201,99	3.496,83	0,00

Tabla 10. Cuadro de amortización de un préstamo con términos amortizativos constantes y tipo de interés variable.

La Figura 4 muestra los términos amortizativos del préstamo, constantes durante la vida del préstamo, exceptuando el último período. Al mismo tiempo, obtenemos una imagen más clara de la evolución de la cuota de interés y de la cuota de amortización a lo largo de la vida del préstamo.

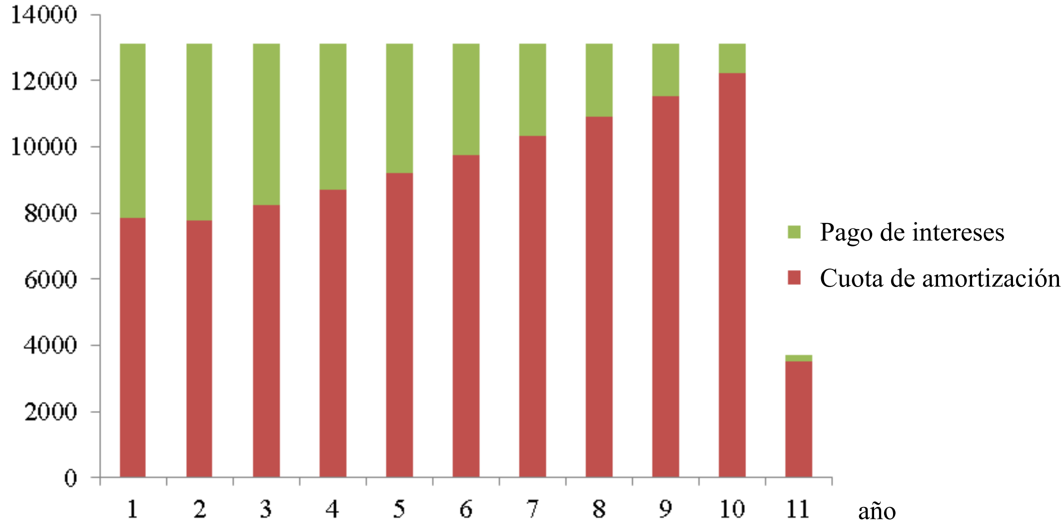


Figura 4. Término amortizativo pagado en un préstamo a tipo de interés variable y términos amortizativos constante.

3.5.3. Préstamos con flexibilidad en el pago de las mensualidades

Un préstamo con flexibilidad en el pago de las mensualidades es aquél en el que el prestatario tiene la opción de diferir el pago de algunas mensualidades hasta el final de la operación. En cualquier caso, es necesario aclarar que no existe una condonación de la deuda, sino un aplazamiento en el pago de las mensualidades hasta el final de la vida del préstamo, teniendo en cuenta que, adicionalmente, no se permitirán nuevos aplazamientos.

Usualmente, el prestatario puede elegir el aplazamiento de hasta dos mensualidades dentro de cada año. Este tipo de préstamo es una operación financiera aleatoria donde la cuantía de las mensualidades es cierta pero los vencimientos son aleatorios. En otras palabras, el prestatario puede optar por realizar el pago de 12, 11 ó incluso 10 mensualidades por año. Generalmente, en este tipo de préstamo el banco establece un límite superior para el número total de cuotas mensuales aplazadas durante la vida total del préstamo.

Antes de pactar la operación con el cliente, el banco tiene que resolver dos cuestiones preliminares. La primera sería calcular el número medio de mensualidades impagadas por parte del prestatario con el fin de determinar la duración real de la operación. La segunda cuestión es determinar el valor de la mensualidad que le asegurase a la entidad prestamista la recuperación del principal, teniendo en cuenta estos posibles aplazamientos, en el vencimiento inicialmente acordado.

A continuación, procedemos a resolver la primera cuestión. Para ello, utilizaremos la siguiente notación:

- p_1 es la probabilidad de que el prestatario no pague dos mensualidades en un año,
- p_2 es la probabilidad de que el prestatario no pague una mensualidad en un año, y
- p_3 es la probabilidad de que el prestatario pague cada mensualidad.

Estas probabilidades dependen de la situación específica de cada prestatario. Obviamente, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ y, generalmente, se cumple que $p_1 > p_2 > p_3$. Por consiguiente, el número esperado de mensualidades anuales impagadas es:

$$\bar{t} = 2p_1 + 1p_2 + 0p_3 = 2p_1 + p_2.$$

Por lo tanto, si la duración del préstamo es de n años, el número esperado de mensualidades impagadas en el período total será $\bar{n} = \bar{t} \cdot n$. Por lo general, los bancos establecen un límite superior de mensualidades impagadas ($n_{\max}$). En todo caso, $\bar{n} = \min\{\bar{t} \cdot n, n_{\max}\}$ sería la cantidad máxima de mensualidades impagadas. Si el banco no exige un límite superior para la cantidad total de mensualidades que puedan ser aplazadas, este límite será $2n$. Sin embargo, es habitual que los bancos limiten a 10 el número de mensualidades que puedan ser diferidas durante toda la vida del préstamo.

Aplicando el análisis combinatorio, el prestatario tiene $\binom{12}{2} = 66$ posibilidades de diferir dos mensualidades cada año, $\binom{12}{1} = 12$ posibilidades de diferir una mensualidad cada año y, evidentemente, $\binom{12}{0} = 1$ posibilidad de pagar todas las mensualidades en un año.

De este modo, si todas las posibilidades de aplazamiento (0, 1 ó 2 mensualidades) tienen la misma probabilidad, entonces $p_1 = \frac{66}{79}$, $p_2 = \frac{12}{79}$ y $p_3 = \frac{1}{79}$. En consecuencia, el número esperado de mensualidades impagadas cada año sería $2\frac{66}{79} + 1\frac{12}{79} = 1{,}823$. Por lo tanto, en el caso de que la duración del préstamo hipotecario fuera de 15 años, el número esperado de mensualidades aplazadas en ese período sería de $1{,}823 \cdot 15 = 27{,}345$.

Con respecto a la segunda cuestión, la cuantía de la mensualidad (m') se deducirá de la siguiente ecuación, en el caso de utilizar el sistema de amortización francés:

$$C_0 = m' \cdot a_{\overline{n-\bar{n}}|i_{(12)}}.$$

En el ejemplo anterior, el valor de la mensualidad, suponiendo un préstamo de 150.000€ a un tipo de interés nominal del 6%, sería:

$$m = \frac{150.000 \cdot 0{,}00407}{1-(1+0{,}00407)^{-180}} = 1.177{,}15€,$$

frente a

$$m' = \frac{150.000 \cdot 0{,}00407}{1-(1+0{,}00407)^{-153}} = 1.319{,}05€$$

que el banco requeriría para recuperar el principal prestado, teniendo en cuenta la flexibilidad en el pago de las mensualidades.

Del mismo modo, podríamos calcular la tasa de interés alternativa (i') considerando un pago mensual de 1.319,05 € en un horizonte temporal de 180 meses:

$$m' = \frac{150.000 \cdot i'_{(12)}}{1-\left(1+i'_{(12)}\right)^{-180}} = 1.319{,}05,$$

de donde:

$$i'_{(12)} = 0{,}55\%.$$

Por lo tanto:

$$i' = 6{,}68\%.$$

Para generalizar el enfoque presentado anteriormente, se pueden considerar dos nuevos conceptos. En efecto, consideremos el caso general en el que:

- n representa el número total de años del préstamo.
- k representa la frecuencia de pago ($k = 2$ en caso de pago semestral; $k = 4$ para pagos trimestrales; $k = 12$ para pagos mensuales, etc.).
- p representa el número máximo de pagos que pueden diferirse cada año. Obviamente, se cumple que $p \leq k$.
- $n_{\max}$ representa el número máximo de pagos que pueden diferirse durante los n años de duración del préstamo.

Si denotamos por $a_{\overline{n/k|}\,i}$ a la suma de los valores actuales de todas las rentas unitarias posibles pagaderas al final de cada período con n pagos, donde k de ellos son cero ($k \leq n$), se verifica que:

$$a_{\overline{n/k|}\,i} = \binom{n-1}{k} \alpha_{\overline{n|}\,i}.$$

Por otro lado, si denotamos por $(r_1,\alpha_1;r_2,\alpha_2;...;r_k,\alpha_k)a_{\overline{n|}i}$ a la suma de los valores actuales de todas las rentas unitarias de $r_1+r_2+\cdots r_k \leq n$ pagos pagaderos al final de cada período y distribuidos en n períodos, se tiene:

$$(r_1,\alpha_1;r_2,\alpha_2;...;r_k,\alpha_k)a_{\overline{n|}i} = \left[\alpha_1\binom{n-1}{r_1-1}\binom{n-r_1}{r_2}\cdots\binom{n-r_1-\cdots-r_{k-1}}{r_k}+\alpha_2\binom{n-1}{r_2-1}\binom{n-r_2}{r_3}\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\binom{n-r_1-\cdots-r_{k-1}}{r_k}+\cdots+\alpha_k\binom{n-1}{r_k-1}\binom{n-r_1}{r_1}\cdots\binom{n-r_1-\cdots-r_{k-2}}{r_{k-1}}\right]a_{\overline{n|}i}.$$

En resumen, este producto financiero ofrece al prestatario la posibilidad de diferir algunas mensualidades de su deuda hasta el final de la vida del préstamo y bajo ciertas condiciones. Se ha empleado un ejemplo práctico para el análisis financiero de este producto en el que hemos especificado el número máximo de mensualidades aplazadas. Con esta información, determinamos el retraso promedio al final del préstamo y el valor de la nueva mensualidad capaz de amortizar el préstamo en el período de tiempo inicialmente pactado.

4. Bibliografía

- Cruz Rambaud, S. (2013). A financial analysis of certain flexible loans: Calculation of the average duration. *International Journal of Economics and Finance*, *5*(4), 53-60. http://dx.doi.org/10.5539/ijef.v5n4p53
- Cruz Rambaud, S. López Pascual, J. & Del Pino Álvarez, M.Á. (2019). Preferences over sequences of payments: A new validation of the q-exponential discounting. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *515*(1), 332-345. https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.09.169
- Cruz Rambaud, S. & Sánchez Pérez, A.M. (2016). Estimating the parameters of a flexible mortgage loan. *Housing Policies and Urban Economics*, 4, 119-137.
- Cruz Rambaud, S., & Valls Martínez, M.C. (2008). *Introducción a las Matemáticas Financieras*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Valls Martínez, M.C. & Cruz Rambaud, S. (2013). *Operaciones Financieras Avanzadas*. Madrid: Ediciones Pirámide.