

Introducción. Un lugar para el razonamiento algebraico

En los últimos años, el desarrollo del pensamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza ha despertado gran interés en la comunidad de investigadores en educación matemática. Diversas perspectivas teóricas y propuestas curriculares recomiendan la introducción de contenidos algebraicos desde los primeros niveles educativos, con el objetivo de enriquecer la actividad matemática escolar y de favorecer el acceso a las matemáticas en secundaria.

Sin embargo, esto plantea algunas cuestiones que deben ser abordadas para su implementación. En primer lugar, clarificar la naturaleza del álgebra escolar, es decir, cuál es la esencia del razonamiento algebraico en los primeros niveles de escolaridad. En segundo lugar, diseñar propuestas curriculares que garanticen el desarrollo progresivo del razonamiento algebraico en los escolares. En tercer lugar, formar a los profesores para que asuman esta nueva manera de entender el álgebra y capacitarlos para su enseñanza.

La introducción del álgebra temprana en el currículum de Educación Primaria persigue organizar la enseñanza de la aritmética y del álgebra sin saltos ni rupturas (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Radford, 2014). El *early algebra* se ha ido consolidando como campo fértil de investigación durante los últimos treinta años, mostrando la necesidad de romper con una tradición que sitúa como opuestas aritmética y álgebra (Wilhelmi, 2017) y de desarrollar un currículum en el que el pensamiento algebraico sea uno de sus ejes principales desde los primeros niveles educativos (Kaput, 2008). Como señalan Godino, Castro, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2012) la inclusión del álgebra en el currículum de la escuela primaria reclama una concepción amplia del razonamiento algebraico elemental, entendiendo que dicho razonamiento no sólo se puede poner de manifiesto en tareas relacionadas con la aritmética, la medida, la geometría o el análisis de datos, sino

que además lo hace con diversos grados de algebrización. Para estos autores, aunque la expresión razonamiento algebraico elemental puede emplearse como sinónimo o traducción de *early algebra* en la etapa de primaria, las características que proponen para el razonamiento algebraico, en términos de tipos de tareas, objetos y procesos algebraicos implicados, permiten incluir en esta noción el álgebra de secundaria, reforzando, de esta manera, una visión integrada y longitudinal del álgebra escolar.

Programas curriculares de diversos países, como Australia (ACARA, 2015), Canadá (OMET, 2005), Estados Unidos (CCSSI, 2015; NTCM, 2000), Singapur (MES, 2012) y España (MECD, 2014; MEFP, 2020) plantean el estudio del álgebra como hilo conductor a través de la formación matemática de los estudiantes desde la Educación Primaria. La generalización, el estudio de patrones y de relaciones funcionales, destacan como elementos fundamentales del razonamiento algebraico que constituyen la base del álgebra en Educación Secundaria. Esta nueva perspectiva sobre el razonamiento algebraico encaja en un enfoque competencial del currículo para toda la enseñanza obligatoria.

El desarrollo del razonamiento algebraico en los niños precisa de una formación inicial específica de los maestros de Educación Primaria. Los futuros maestros deben tener un conocimiento del álgebra y lo que implica su enseñanza en la escuela primaria para que sean capaces de movilizar este conocimiento más tarde en su práctica y, asimismo, sean capaces de crear situaciones de enseñanza para desarrollar el pensamiento algebraico de sus alumnos (Branco y Ponte, 2012). Así, los futuros maestros deben reconocer el carácter algebraico en las actividades matemáticas de la escuela elemental, diseñar actividades que expresen un proceso de generalización y que se puedan resolver tanto de una forma aritmética como de manera algebraica, así como generar una dinámica de aula que promueva la flexibilidad de estrategias y las conexiones entre ideas matemáticas. El razonamiento algebraico es un proceso que favorece la generalización de ideas matemáticas. Las generalizaciones se establecen a través del discurso de la argumentación y se expresan cada vez con términos más formales; hecho que requiere en los maestros una atención a la estructura y las relaciones entre los objetos matemáticos (Blanton y Kaput, 2003).

Como resultado de su estudio sobre la consideración del álgebra temprana en los currículos de Educación Infantil y Primaria de diversos países, Pincheira y Alsina (2021a) concluyen la necesidad de

Ofrecer a los futuros maestros y a los maestros en activo experiencias de formación que incorporen aspectos que permitan reconocer y promover el desarrollo del pensamiento algebraico en sus estudiantes. Estas experiencias de formación deben suponer, por una parte, el desarrollo y reflexión sobre tareas matemáticas de carácter algebraico, así como estrategias para propiciar su enseñanza, mediante la representación de situaciones y problemas con patrones, secuencias, uso de expresiones simbólicas formuladas con variables, modelización, funciones, proporcionalidad, expresiones equivalentes, planteamiento de fórmulas sencillas y resolución de ecuaciones. (p. 117)

Estos aspectos se tratan con más detalle en las siguientes secciones.

1.1. Un currículum competencial

En los últimos años, diferentes países y organismos internacionales han dedicado grandes esfuerzos a diseñar un currículo escolar que responda a las demandas de formación propias del siglo XXI (Egido, 2022; Reimers, 2021). Gran parte de las propuestas curriculares actuales tienen como punto de partida para su diseño, desarrollo e implementación en el aula, la *alfabetización matemática*. Según se establece en el contexto del Proyecto PISA 2021 (OECD, 2018):

La alfabetización matemática es la capacidad de un individuo de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en una amplia variedad de contextos de la vida real. Esto incluye conceptos, procedimientos, datos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a conocer el papel que cumplen las matemáticas en el mundo y hacer los juicios y tomar las decisiones bien fundamentadas que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos del siglo XXI. (p. 7)

La definición de alfabetización matemática refiere a la capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar (y evaluar) las matemáticas. Estas tres palabras, formular (situaciones matemáticamente) emplear (conceptos, hechos, procedimientos y razonamientos

matemáticos) e interpretar (aplicar y evaluar resultados matemáticos) proporcionan una estructura útil y significativa para organizar los procesos matemáticos que describen lo que los individuos hacen para conectar el contexto de un problema con las matemáticas y resolver el problema (p. 19). Esta concepción de la alfabetización matemática «reconoce la importancia de que los estudiantes desarrollen una sólida comprensión de una serie de conceptos y procesos matemáticos y se den cuenta de los beneficios de participar en exploraciones del mundo real que se apoyan en esas matemáticas» (p. 6)

En las recientes reformas curriculares de diversos países para la etapa de educación obligatoria, desempeña un papel central la idea de competencia, término que sugiere la integración de conocimientos, habilidades y actitudes y que, por tanto, supone la búsqueda de fines de aprendizaje más ambiciosos que en los currículos predecesores (Reimers, 2021). En España, la LOMLOE (MEFP, 2020) ha planteado también la necesidad de la renovación del currículo para la modernización del sistema educativo, prestando especial énfasis en el aspecto competencial de la reforma. Así, en los documentos publicados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) sobre el nuevo currículo se hace alusión a la enseñanza competencial como propuesta de adaptación a las necesidades y al cambio:

En un mundo en el que están aconteciendo grandes cambios, tanto a nivel local como a nivel internacional, se hace necesario incluir nuevos aprendizajes en la enseñanza que incluyan no solo contenidos, sino también valores, destrezas, emociones, motivaciones y actitudes, con la finalidad de contribuir en la formación de personas responsables y decisivas, comprometidas con la colaboración, la sostenibilidad y el bienestar (MEFP, 2020, p. 9)

La *competencia matemática* supone la habilidad para comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones en las que las matemáticas juegan o pueden desempeñar un papel (Niss, 2002). Implica la capacidad de un individuo de identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, para hacer juicios bien fundamentados y poder tratar e involucrarse con las matemáticas (OECD, 2018).

La enseñanza competencial persigue una formación integral de todos los estudiantes, de manera paulatina a lo largo de las diferentes etapas educativas, articulando todas las áreas de conocimiento (MEFP, 2020). La implantación de un currículo orientado a la adquisición de competencias pretende formar personas con mayor eficacia para afrontar los problemas reales. Desarrollar competencias permite a los escolares disponer de la capacidad de desenvolverse ante situaciones, a veces contradictorias y desafiantes que se plantean en la sociedad, para lo que es imprescindible que el alumnado relacione los conceptos que aprende con las aplicaciones que tienen en su mundo cotidiano (MEFP, 2020).

Esta tendencia a organizar los currículos de matemáticas en la enseñanza obligatoria por competencias se debe entender como consecuencia del «giro procesal» en el diseño de currículos de matemáticas. Dicho desplazamiento ha significado pasar de concebir currículos de matemáticas focalizados en el aprendizaje de conceptos, a pensar en currículos cuyo objetivo es prioritariamente el aprendizaje de procesos (Font, Rubio, Giménez y Planas, 2009). Esta orientación procesal se observa en los Principios y Estándares (NCTM, 2000), donde los procesos matemáticos: resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación, ponen de relieve las formas de adquisición y uso de los contenidos de números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad, para promover la competencia matemática (NCTM, 2000; Niss 2002; OECD, 2006).

Se percibe, como afirma Rubio (2012) cierto «territorio compartido» entre los términos proceso y competencia. Así, guardan en común una idea esencial: la capacidad de usar con sentido y de forma eficaz las matemáticas que se aprenden en una variedad de contextos educativo, social y personal. En la tabla 1.1 se realiza una comparación entre los estándares de procesos del NCTM (2000) y las competencias matemáticas en los marcos de Niss (2002), el OECD (2006) y las establecidas en nuestro currículo actual. Los espacios vacíos en la tabla 1.1 indican una ausencia de correspondencia entre competencias y estándares. Así se observa que en los marcos de Niss (2002) o el OECD (2006) no se hace referencia explícita a la competencia para reconocer y emplear conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, o que el desarrollo

de destrezas personales para afrontar una actitud matemática supone una novedad en nuestro actual currículo frente a los marcos previos.

Tabla 1.1. Procesos y competencias matemáticas en diversos marcos curriculares

Procesos matemáticos (NCTM,2000)	Competencias Matemáticas (Niss, 2002)	Competencias matemáticas (OECD, 2006)	Competencias matemáticas LOMLOE (MEFP, 2022)
Resolución de problemas	Planteamiento y resolución de problemas matemáticos	Planteamiento y resolución de problemas	Resolver situaciones problematizadas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder, obtener soluciones y asegurar su validez desde un punto de vista formal y en relación con el contexto planteado.
	Uso de recursos y herramientas	Uso de herramientas y recursos	
Razonamiento y prueba	Dominio de modos de pensamiento matemático	Pensamiento y razonamiento	Explorar, formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de tipo matemático en situaciones basadas en la vida cotidiana, de forma guiada, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para contrastar su validez, adquirir e integrar nuevo conocimiento.
	Razonamiento matemático		
		Argumentación	

Procesos matemáticos (NCTM,2000)	Competencias Matemáticas (Niss, 2002)	Competencias matemáticas (OECD, 2006)	Competencias matemáticas LOMLOE (MEFP, 2022)
Comunicación	Comunicación en, con y acerca de las matemáticas	Comunicación	Comunicar y representar, de forma individual y colectiva, conceptos, procedimientos y resultados matemáticos, utilizando el lenguaje oral, escrito, gráfico, multimodal y la terminología apropiados, para dar significado y permanencia a las ideas matemáticas.
Representación	Representación de entidades matemáticas	Representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal	
	Manejo de símbolos matemáticos y formalismos	Uso de lenguajes simbólico, formal y técnico, y las operaciones	
	Análisis y construcción de modelos	Construcción de modelos	Interpretar situaciones de la vida cotidiana, proporcionando una representación matemática de las mismas mediante conceptos, herramientas y estrategias, para analizar la información más relevante.
Conexiones			Reconocer y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas, interrelacionando conceptos y procedimientos, para interpretar situaciones y contextos diversos.
			Desarrollar destrezas personales que ayuden a identificar y gestionar emociones al enfrentarse a retos matemáticos, fomentando la confianza. Desarrollar destrezas sociales, reconociendo y respetando las emociones, experiencias y la diversidad.

Este nuevo enfoque ha llevado también a que los contenidos en el nuevo currículum de la LOMLOE vengan enunciados en forma de *saberes básicos*, que se establecen para cada ciclo en cada una de las áreas. Así, en el Real Decreto 157/2022 de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria se consideran saberes básicos los «conocimientos, destrezas y actitudes que constituyen los contenidos propios de un área o ámbito y cuyo aprendizaje es necesario para la adquisición de las competencias específicas» (p. 24388). Estas competencias se entienden como los desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada área y constituyen el elemento de conexión entre dichos saberes, el perfil de salida del alumnado y los criterios de evaluación.

Los conocimientos, destrezas y actitudes que subyacen a las competencias, constituyen la base de la construcción de nuevos aprendizajes (Figura 1.1) que ayudará al alumnado a afrontar los desafíos del siglo XXI (MEFP, 2022a).

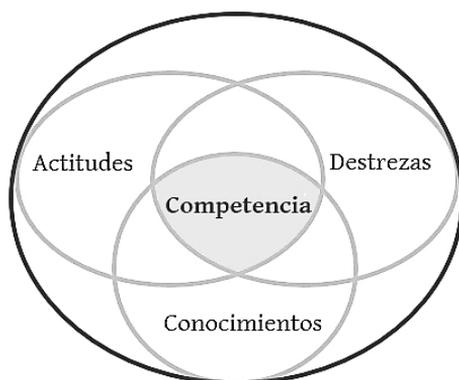


Figura 1.1. Elementos en la construcción de nuevos aprendizajes. Fuente: Elaboración propia

Los saberes básicos se estructuran en torno al concepto de *sentido matemático* (Figura 1.2) entendido como el conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto de contenidos numéricos y algebraicos, geométricos, métricos y estocásticos, que permiten em-

plear estos contenidos de una manera funcional y con confianza en las propias habilidades (Ruiz-Hidalgo et al., 2019).

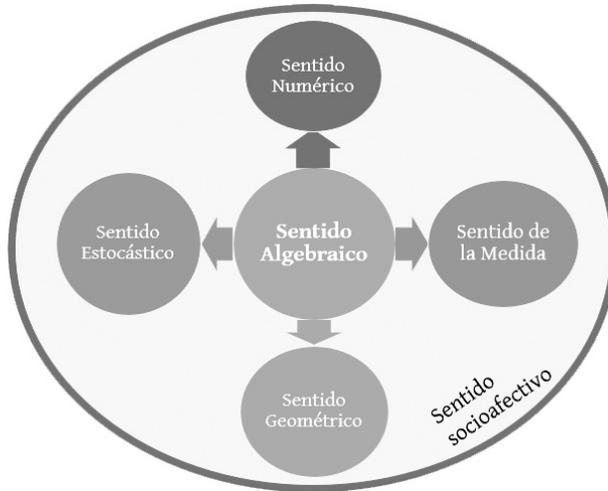


Figura 1.2. Estructuración del contenido a través de los sentidos en la LOMLOE. Fuente: Elaboración propia

El *sentido numérico* se caracteriza por el desarrollo de destrezas y modos de pensar basados en la comprensión, la representación y el uso flexible de números y operaciones. Requiere una buena intuición sobre las relaciones entre números y el dominio del cálculo mental, así como la habilidad para emplear las relaciones entre números para dar sentido a los cálculos, elegir la mejor representación numérica, la estrategia de cálculo que mejor se adapta a cada situación y valorar si los resultados son razonables. El sentido numérico se desarrolla gradualmente como resultado de explorar situaciones que requieren el empleo de números y operaciones con flexibilidad y comprensión, la búsqueda de relaciones y patrones en los números, el uso de diferentes niveles de precisión con los números y la flexibilidad y creatividad en las formas de obtener un cálculo numérico o emplearlo para tomar una decisión.

El *sentido espacial* es fundamental para comprender y apreciar los aspectos dimensionales o relacionales de objetos físicos del mundo y la posibilidad de su modelización mediante saberes geométricos.

Queda determinado por la competencia del sujeto para la identificación, representación y clasificación de formas y figuras, el reconocimiento y descubrimiento de sus propiedades, la identificación de relaciones y la descripción de sus movimientos. El *sentido de la medida*, caracterizado por la comprensión de propiedades de los objetos del mundo natural, permite entender y elegir las unidades adecuadas para estimar, medir y comparar atributos; utilizar instrumentos adecuados para realizar dichas mediciones, así como, comprender las relaciones entre magnitudes, utilizando la experimentación. Este sentido, junto con el espacial, supone la comprensión de las relaciones entre formas y medidas para desarrollar fórmulas que permitan calcular la longitud, el área o el volumen de cuerpos, entre otras magnitudes básicas. Por ello, el estudio de la medida se inicia en Educación Primaria por medio de materiales concretos y la comparación de objetos físicos, para proseguir con el uso de diferentes instrumentos de medida y la experimentación con ayuda de recursos tecnológicos. Después, a lo largo de la Educación Secundaria, el alumnado podrá formular conjeturas, estudiar relaciones y deducir fórmulas y propiedades matemáticas. Finalmente, en la etapa de Bachillerato se incorpora el cálculo integral como herramienta para la medida de superficies y volúmenes.

El *sentido estocástico* se orienta, por un lado, hacia el razonamiento y la interpretación de datos, la valoración crítica y la toma de decisiones a partir de información estadística. Se concreta en la capacidad para llevar a cabo investigaciones estadísticas básicas, formulación de cuestiones que se pueden responder mediante la recolección o consideración de diversas muestras de datos, su análisis e interpretación de los resultados de este. Por otro lado, se dirige hacia la comprensión de fenómenos aleatorios, su comunicación y la capacidad de realizar algunas predicciones en situaciones de la vida cotidiana. De manera específica, se concreta en la habilidad para reconocer la necesidad de los datos, para transnumerar (es decir, para cambiar la representación de los datos, darles sentido o comunicar el significado que surge de ellos de forma que sea comprensible para otras personas), de percibir la variabilidad de los datos y manejar modelos básicos o avanzados que permitan predecirla, de realizar hipótesis bajo estas situaciones de incertidumbre y, cuando proceda,

contrastar dichas hipótesis formal o informalmente, dar sentido al cálculo de la medida de esta incertidumbre (probabilidad) y tomar decisiones en situaciones acordes a la competencia y desarrollo de los sujetos. Su desarrollo es progresivo, pero se inicia en los primeros niveles de escolarización, pues está ligado a la intuición sobre la incertidumbre y, por ello, es necesario evitar que se generen sesgos o falsas concepciones.

El *sentido algebraico* proporciona el lenguaje en el que se comunican las matemáticas. Engloba los saberes relacionados con el reconocimiento de patrones y las relaciones entre variables, la expresión de regularidades mediante diferentes representaciones o la modelización de situaciones con expresiones simbólicas. Lo caracteriza el paso de lo particular a lo general, de las situaciones numéricas concretas a la búsqueda de generalidades para representar y comprender relaciones cuantitativas entre cantidades variantes e invariantes.

Finalmente, el *sentido socioafectivo* está integrado por aquellos conocimientos, destrezas y actitudes esenciales para entender las emociones. Emplearlas correctamente no solo mejora el rendimiento del alumnado en matemáticas, sino que también combate actitudes negativas hacia ellas y promueve el aprendizaje activo.

En la siguiente sección se describe de manera específica el tratamiento del sentido algebraico en el currículo y la relación con otras propuestas.

1.2. Razonamiento algebraico en el currículo

Como hemos mencionado, numerosas investigaciones dedicadas al estudio del álgebra sugieren la necesidad de incorporarla en los currículos desde los primeros niveles educativos, dado que algunas dificultades que encuentran los escolares con esta disciplina proceden de su consideración tardía en la Educación Secundaria. Se parte de que «la exposición temprana a las ideas algebraicas a través del currículo podría facilitar la transición de la aritmética al álgebra debido a que aspectos como la igualdad, la equivalencia, el sentido de las operaciones y la generalización son estudiados tempranamente en la escuela» (Castro y Godino, 2014, p. 147). Kaput (2000) denomina a este proceso como «algebrización del currículo», esto es, la integración del razonamiento algebraico a lo largo de toda la es-