# Introducción

El objetivo principal de este texto es servir como manual introductorio a la Topología General. Principalmente planteado para el estudiante de la carrera de Matemáticas, este libro compagina la teoría básica de topología con estrategias de demostración, con el fin de que el interesado se familiarice con el lenguaje y el desarrollo de textos de carácter matemático, a la vez que conoce lo más esencial desde el punto de vista de esta disciplina. En cuanto al contenido abordado a lo largo del manual, se comienza, en un primer capítulo, con la exposición de conceptos y resultados preliminares para facilitar la primera toma de contacto con la materia por parte del lector. El resto de capítulos versan sobre contenidos explícitos de la disciplina: el Capítulo 2 trata sobre espacios métricos, si bien en el tercero se extiende la teoría anterior al ambiente de espacios topológicos, mientras que el Capítulo 4 está dedicado, íntegramente, al estudio de la propiedad de compacidad, culminando con un quinto capítulo que tiene que ver con la propiedad de conexión. Se trata de un complemento del libro *Topología Resuelta* ([3]), en el que los mismos autores recopilan gran cantidad de problemas resueltos de la materia, siguiendo una estructura similar a la del presente texto.

Almería, 5 de diciembre de 2023 — Los autores

# Capítulo 1

# Preliminares

En este capítulo, se recuerda una serie de nociones y resultados matemáticos para poner al día al lector sobre lo básico de cara al seguimiento y estudio del resto del contenido del manual.

## 1.1. Conjuntos

**Definición 1.1.** Un *conjunto* es una colección de objetos, cada uno de los cuales recibe el nombre de *elemento* del conjunto. Si $x$ es un elemento del conjunto $X$, escribimos $x \in X$, mientras que si $x$ no forma parte de $X$, escribimos $x \notin X$.

Normalmente, representamos un conjunto, de forma analítica, recopilando sus elementos entre llaves, y lo denotamos por una letra mayúscula. Por ejemplo, el conjunto de las vocales es $A = \{a, e, i, o, u\}$, mientras que el de los números pares se puede escribir como $\{2n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

Hay algunos conjuntos a los que se suele hacer referencia mediante ciertas letras o símbolos, como por ejemplo:

- Números naturales: $\mathbb{N}$.
- Números enteros: $\mathbb{Z}$.
- Números reales: $\mathbb{R}$.
- Números racionales: $\mathbb{Q}$.
- Conjunto vacío, que es el que no tiene elementos: $\emptyset$.

**Definición 1.2.** Dados dos conjuntos $A$ y $B$, estos pueden guardar las relaciones que siguen:

- *Inclusión*: $A$ está contenido en $B$, lo que se denota por $A \subseteq B$, si todo elemento de $A$ pertenece a $B$. En este caso, decimos que $A$ es un *subconjunto* de $B$. Escribiremos, además, $A \subset B$ si $A \subseteq B$ y hay elementos que están en $B$ pero no en $A$. Por ejemplo, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$.
- *Igualdad*: $A = B$ si están formados por los mismos elementos. Por ejemplo, el conjunto de las vocales es igual al conjunto de las vocales de la palabra "eucalipto".

Además, podemos operar con conjuntos:

**Definición 1.3.** Sean $A$ y $B$ dos conjuntos. Podemos realizar las siguientes operaciones:

- *Unión*: el conjunto $A \cup B$, que se lee "A unión B", es el formado por los elementos que están en $A$ o $B$. Por ejemplo, el conjunto de los enteros no negativos se puede escribir como la unión $\mathbb{N} \cup \{0\}$.
- *Intersección*: el conjunto $A \cap B$, que se lee "A intersección B", es el formado por los elementos que están, simultáneamente, en $A$ y $B$. Por ejemplo, $\{g\}$ es la intersección de $\{j, f, g, r\}$ y $\{m, a, s, g\}$.
    - $A$ y $B$ son *disjuntos* si no tienen elementos en común, es decir, si $A \cap B = \emptyset$. Por ejemplo, $\mathbb{N}$ y el conjunto de los enteros negativos son disjuntos.
- Si $A \subseteq B$, se define el *complementario* de $A$ en $B$, denotado por $B \setminus A$, como el conjunto de puntos de $B$ que no están en $A$. Por ejemplo, el conjunto de los irracionales es el complementario de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

Conocidas las operaciones con conjuntos con las que se tratará en el resto del manual, es conveniente conocer las propiedades de estas, recopiladas en la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.** *Sean $A, B$ y $C$ tres subconjuntos de $X$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

- *Idempotente:* $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
- *Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- *Asociativa:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- *Distributiva:* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- *Simplificativa:* $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$.
- *Elemento neutro:* $A \cup \emptyset = A, A \cap X = A$.
- *Elemento complementario:* $A \cup (X \setminus A) = X$, $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.
- *Elemento absorbente:* $A \cup X = X$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
- *Leyes de De Morgan:* $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Las operaciones de unión e intersección, definidas anteriormente para dos conjuntos, se pueden extender, de manera natural, a una familia arbitraria de conjuntos. Pongamos que $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de $X$. Entonces la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ se puede definir como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos que forman parte de $\mathcal{A}$. Similarmente, la intersección de los elementos de $\mathcal{A}$ se puede definir como el conjunto de los elementos que están en todos los elementos de la familia.

En consecuencia, todas las propiedades de las operaciones con conjuntos recopiladas previamente se cumplen para el caso de familias arbitrarias de conjuntos. Así, por ejemplo, la propiedad distributiva que relaciona un conjunto $B$ con los elementos de la familia $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ se puede escribir como

$$B \cup \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$$

mientras que para el caso de la intersección tenemos que

$$B \cap \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

Por otro lado, cabe destacar la igualdad que surge de las Leyes de De Morgan cuando $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ es una familia de subconjuntos de $X$:

$$X \setminus \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i), \qquad X \setminus \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

**Definición 1.4.** Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos. Se define el *producto cartesiano* de $X$ e $Y$ como el conjunto $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Por ejemplo, el plano cartesiano, $\mathbb{R}^2$, es el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

De manera análoga, se puede definir el producto cartesiano de un número finito de conjuntos, $X_1 \times \ldots \times X_n$.

## 1.2. Aplicaciones

En esta sección recordamos la noción de aplicación, junto con los tipos de aplicaciones con los que se trata en el manual y sus propiedades, terminando con una recopilación de las propiedades de la imagen y preimagen de un conjunto a través de una aplicación.

**Definición 1.5.** Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos. Una *aplicación* (o *función*) $f$ entre $X$ e $Y$ es una correspondencia o regla que asigna a cada $x \in X$ un único elemento de $Y$, $f(x)$, al que llamamos imagen de $x$. La denotaremos por $f : X \to Y$ o bien $X \xrightarrow{f} Y$.

Dada una aplicación, presentamos una serie de conceptos:

**Definición 1.6.** Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos y consideremos $f : X \to Y$.

- $X$ es el *dominio* de $f$.
- $Y$ recibe el nombre de *recorrido*, *rango* o *codominio* de $f$.
- $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in X\}$ es el *conjunto imagen* de $f$.

Dos aplicaciones $f, g : X \to Y$ son iguales, lo que se denota por $f = g$, si para cada $x \in X$, se cumple que $f(x) = g(x)$. Es más, dos aplicaciones iguales deben tener el mismo dominio y el mismo codominio. Una de las aplicaciones más conocidas es la siguiente:

**Definición 1.7.** Sea $X$ un conjunto. Se define la *aplicación identidad* como $id : X \to X$ dada por $id(x) = x$ para todo $x \in X$.

Podemos calcular la imagen de un conjunto mediante una aplicación, tal y como muestra la siguiente definición:

**Definición 1.8.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre los conjuntos $X$ e $Y$ y consideremos $A \subseteq X$. El *conjunto imagen* de $A$ por $f$, denotado por $f(A)$, es el subconjunto de $Y$ formado por todas las imágenes de los elementos de $A$, es decir,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

La aplicación $f$ restringida al subconjunto $A$ se denomina *restricción de $f$ a $A$* y se denota por $f|_A$, esto es, $f|_A : A \to Y$ es la aplicación dada por $f|_A(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

**Definición 1.9.** Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre los conjuntos $X$ e $Y$ y consideremos $B \subseteq Y$. La *imagen inversa* (o *preimagen*) de $B$ por $f$ es

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Otra aplicación que se puede definir a partir de un subconjunto es la que sigue.

**Definición 1.10.** Sea $A \subseteq X$. Entonces la *aplicación inclusión* de $A$ en $X$ es $i_A : A \hookrightarrow X$ dada por $i_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Finalmente, presentamos unas aplicaciones que, partiendo del producto cartesiano de conjuntos, terminan en cada uno de los factores de dicho producto.

**Definición 1.11.** Se definen las *proyecciones canónicas*, $p_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$, por $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

### 1.2.1. Tipos de funciones

**Definición 1.12.** Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos y consideremos $f : X \to Y$. Diremos que:

- $f$ es *inyectiva* si dados $x_1, x_2 \in X$ con $f(x_1) = f(x_2)$, se tiene que $x_1 = x_2$, esto es, dos elementos distintos de $X$ tienen distinta imagen.

- $f$ es *sobreyectiva* si $\mathrm{Im}(f) = Y$ o, de manera equivalente, si para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

- $f$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

A partir de dos aplicaciones de forma que el codominio de una coincide con el dominio de otra, podemos definir la siguiente aplicación.

**Definición 1.13.** Consideremos los conjuntos $X, Y, Z$ y las aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. La *composición* de $f$ y $g$ es la aplicación $g \circ f : X \to Z$ dada por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in X$.

**Proposición 1.2.** *Consideremos los conjuntos $X, Y, Z$ y las aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Si $f$ y $g$ son inyectivas (respectivamente sobreyectivas/ biyectivas), entonces $g \circ f$ es inyectiva (respectivamente sobreyectiva/ biyectiva).*

*Demostración.*

- Para funciones inyectivas: sean $x_1, x_2 \in Z$ tales que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Al ser $g$ inyectiva, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$ y, al ser $f$ inyectiva, se concluye que $x_1 = x_2$, lo que implica que $g \circ f$ es inyectiva.

- Para funciones sobreyectivas: sea $z \in Z$. Como $g$ es sobreyectiva, existe $y \in Y$ tal que $g(y) = z$. Como, además, $f$ es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Por tanto, $g(f(x)) = g(y) = z$, lo que implica que $g \circ f$ es sobreyectiva.

- Para funciones biyectivas, la comprobación correspondiente se sigue de las dos propiedades anteriores.

□

Partiendo de una composición, no siempre podemos garantizar la inyectividad y/o sobreyectividad de las funciones que forman parte de ella, como mostramos a continuación.

**Proposición 1.3.** *1. Una aplicación $f : X \to Y$ es sobreyectiva si, y solo si tiene inversa a derecha, es decir, existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id$.*

*2. Una aplicación $f : X \to Y$ es inyectiva si, y solo si tiene inversa a izquierda, es decir, existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id$.*

*Demostración.* 1. $\Rightarrow$) Dado que $f : X \to Y$ es sobreyectiva, para cada $y \in Y$, existe $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$. Definimos, entonces, la aplicación $g : Y \to X$ dada por $g(y) = x_y$ y es claro que $f \circ g = id$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $g : Y \to X$ tal que $f \circ g = id$. Sea $y \in Y$. Entonces $f(g(y)) = y$, por lo que $f$ es sobreyectiva.

2. $\Rightarrow$) Sea $y \in f(X)$. Entonces, por ser $f$ inyectiva, existe un único $x_y \in X$ tal que $f(x_y) = y$. Definamos la aplicación $g : Y \to X$ como la dada por $g(y) = x_y$ y por $g(y) = x_0$ siendo $x_0 \in X$ en caso de que $y \in Y \setminus f(X)$. Puede comprobarse que $g \circ f = id$.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $g : Y \to X$ tal que $g \circ f = id$. Dados $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$, si aplicamos $g$, tenemos que $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$, con lo que $f$ es inyectiva.

□

### 1.2.2. Propiedades conjuntistas de las funciones

En esta subsección estudiaremos las relaciones entre las funciones y las operaciones de conjuntos.

**Proposición 1.4.** *Sean $f : X \to Y$ una función entre dos conjuntos $X$ e $Y$, $A \subseteq X$, $A_i \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $B_i \subseteq Y$ para todo $i \in I$ (donde $I$ es un conjunto de índices). Entonces:*

*1. Si $A \subseteq B$, entonces $f(A) \subseteq f(B)$.*

*2. Si $A \subseteq B$, entonces $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.*

3. *$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.*

4. *$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.*

5. *$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.*

6. *$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.*

7. *$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Si $f$ es sobreyectiva, entonces $f(f^{-1}(B)) = B$.*

8. *$A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Si $f$ es inyectiva, entonces $A = f^{-1}(f(A))$.*

9. *$f(X) \setminus f(A) \subseteq f(X \setminus A)$. Si $f$ es inyectiva, entonces $f(X) \setminus f(A) = f(X \setminus A)$.*

10. *$f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.*

*Demostración.* 1. Sea $y \in f(A)$. Entonces $y = f(x)$ para algún $x \in A$. Como $A \subseteq B$, tenemos que $x \in B$, por lo que $y \in f(B)$ y, por tanto, $f(A) \subseteq f(B)$.

2. Sea $y \in f^{-1}(A)$. Entonces $f(y) \in A$ y como $A \subseteq B$, se tiene $f(y) \in B$, lo que implica que $y \in f^{-1}(B)$.

3. $\subseteq$) Sea $y \in f(\bigcup_{i\in I} A_i)$. Entonces existe $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $y = f(x)$. Por tanto, existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$ y, así, $y = f(x) \in f(A_i)$. Por tanto, $y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

   $\supseteq$) Dado que para todo $i \in I$, se tiene que $A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, aplicando el punto 1, se deduce que $f(A_i) \subseteq f(\bigcup_{i\in I} A_i)$ para cada $i \in I$ y, así, $\bigcup_{i\in I} f(A_i) \subseteq f(\bigcup_{i\in I} A_i)$.

4. Dado que $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i$ para todo $i \in I$, por el punto 1 se tiene que $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq f(A_i)$ para todo $i \in I$ y, pr consiguiente, $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.

5. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$. Entonces $f(x) = y$ para algún $y \in \bigcup_{i\in I} B_i$. Por ello, existe $i \in I$ tal que $y \in B_i$ y, así, $x \in f^{-1}(B_i)$. Por tanto, $x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

   $\supseteq$) Dado que $B_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$ para todo $i \in I$, por el punto 2 tenemos que $f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$ para cada $i \in I$ y, así, $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$.

6. $\subseteq$) Dado que $\bigcap_{i\in I} B_i \subseteq B_i$ para todo $i \in I$, por el punto 2 se tiene que $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq f^{-1}(B_i)$ para todo $i \in I$, luego $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

   $\supseteq$) Sea $x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. Entonces $x \in f^{-1}(B_i)$ para todo $i \in I$, es decir, $f(x) \in B_i$ para todo $i \in I$, con lo que $f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i$ para todo $i \in I$ y, así, $x \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$.

7. Sea $y \in f(f^{-1}(B))$. Entonces existe $x \in f^{-1}(B)$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in f^{-1}(B)$, entonces $y = f(x) \in B$ y tenemos justificada la inclusión de $f(f^{-1}(B))$ en $B$.

   Por otra parte, veamos que $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ en caso de que $f$ sea sobreyectiva. Sea $y \in B$. Como $f$ es sobreyectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Dado que $f(x) = y \in B$, entonces $x \in f^{-1}(B)$ y, por tanto, $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

8. Sea $x \in A$. Entonces $f(x) \in f(A)$, por lo que $x \in f^{-1}(f(A))$ y tenemos justificada la inclusión de $A$ en $f^{-1}(f(A))$.

   Por otra parte, veamos que $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ en caso de que $f$ sea inyectiva. Sea $x \in f^{-1}(f(A))$. Entonces $f(x) \in f(A)$, por lo que existe $a \in A$ tal que $f(x) = f(a)$. Como $f$ es inyectiva, se sigue que $x = a$, lo que supone que $x \in A$.

9. Sea $y \in f(X) \setminus f(A)$. Entonces existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Nótese que $x \notin A$, pues si $x \in A$, entonces $y = f(x) \in f(A)$, pero $y \notin f(A)$. Por tanto, $x \in X \setminus A$ y se deduce que $y = f(x) \in f(X \setminus A)$.

   Por otra parte, veamos que $f(X \setminus A) \subseteq f(X) \setminus f(A)$ en caso de que $f$ sea inyectiva. Sea $y \in f(X \setminus A)$. Entonces existe $x \in X \setminus A$ tal que $y = f(x)$. Por tanto, $y \in f(X)$. Supongamos que $y \in f(A)$, en cuyo caso existe $a \in A$ tal que $y = f(a)$, pero entonces $y = f(x) = f(a)$ y, dado que $f$ es inyectiva, $x = a$, pero $x \in X \setminus A$, una contradicción. Se concluye, entonces, que $y \notin f(A)$, es decir, $y \in f(X) \setminus f(A)$.

10. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$, entonces $f(x) \in Y \setminus B$. Supongamos que $x \in f^{-1}(B)$, en cuyo caso $f(x) \in B$, pero $f(x) \in Y \setminus B$, así que obtenemos una contradicción, y debe ser $x \in X \setminus f^{-1}(B)$.

    $\supseteq$) Sea $x \in X \setminus f^{-1}(B)$. Entonces $x \notin f^{-1}(B)$, por lo que $f(x) \notin B$, es decir, $f(x) \in Y \setminus B$, con lo que $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$.

$\square$

## 1.3. Conjuntos numerables

**Definición 1.14.** Se dice que un conjunto $A$ es *finito* si es vacío o si existe una aplicación biyectiva $f : A \to \{1, \ldots, n\}$ para algún natural $n$.

Por ejemplo, es finito el conjunto de las vocales.

**Definición 1.15.** Se dice que un conjunto $X$ es *numerable* si es vacío o existe una aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to X$.

Es claro, entonces, que el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es numerable.

**Proposición 1.5.** *$X$ es numerable si, y solo si es vacío o existe una aplicación inyectiva $f : X \to \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Se sigue directamente de la Proposición 1.3. □

El siguiente resultado recopila varias propiedades de los conjuntos numerables.

**Proposición 1.6.**

1. *Si $X$ es finito, entonces $X$ es numerable.*
2. *Si $X$ es numerable y $A \subseteq X$, entonces $A$ es numerable.*
3. *Si $X_1, \ldots, X_n$ son numerables, entonces $X_1 \times \ldots \times X_n$ es numerable.*
4. *Si $N$ es numerable y $\{X_n : n \in N\}$ es una colección de conjuntos numerables entonces $\bigcup_{n \in N} X_n$ es numerable.*

*Demostración.*

1. Si $X$ es finito, podemos escribir $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, y es sencillo de comprobar que la aplicación $f : X \to \mathbb{N}$ dada por $f(x_i) = i$ es inyectiva. Por la Proposición 1.5, tenemos que $X$ es numerable.

2. Como $X$ es numerable, existe una aplicación $f : \mathbb{N} \to X$ sobreyectiva. Consideremos una aplicación $g : X \to A$ que cumpla que $g|_A = id$. Dado que la identidad es sobreyectiva, la aplicación $h = g \circ f : \mathbb{N} \to A$ también lo es, lo que implica que $A$ es numerable.

3. Procederemos mediante inducción:

   Caso $n = 2$: Supongamos que $X$ e $Y$ son dos conjuntos numerables no vacíos. Entonces, por la Proposición 1.5, existen dos aplicaciones inyectivas, $f_1 : X \to \mathbb{N}$ y $f_2 : Y \to \mathbb{N}$. Podemos, además, definir la aplicación $g : X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $g(x, y) = (f_1(x), f_2(y))$, función que es claramente inyectiva. Si probamos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable, entonces existirá una aplicación inyectiva de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, que compuesta con $g$ nos dará una aplicación inyectiva de $X \times Y$ en $\mathbb{N}$ y, así, $X \times Y$ es numerable.

   Consideremos la aplicación $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $h(n, m) = 2^n 3^m$. Sean $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ de modo que $g(n, m) = g(p, q)$. Entonces $2^n 3^m = 2^p 3^q$. Supongamos que $n < p$. Entonces podemos escribir $3^m = 2^{p-n} 3^q$, de donde se sigue que $3^m$ es par, pero esto es una contradicción, puesto que es impar para todo $m$. Si $p < n$, llegamos a una contradicción similar, así que $n = p$ y, en consecuencia, $3^m = 3^q$. Supongamos que $m < q$. Entonces $1 = 3^{q-m}$, lo que es una contradicción, ya que

$3^{q-m} \geq 3$ si $m < q$. Una contradicción similar se obtiene si suponemos que $q < m$, por lo que $m = q$ y queda probada la inyectividad de $g$. Por tanto, la aplicación $h = g \circ f : X \times Y \to \mathbb{N}$ es inyectiva.

Finalmente, bajo el supuesto de que $X_1 \times \ldots \times X_n$ es numerable, y teniendo en cuenta que $X_{n+1}$ también lo es, basta con aplicar el razonamiento del caso en que $n = 2$ para tener que $X_1 \times \ldots \times X_n \times X_{n+1}$ es numerable, ya que claramente existe una biyección entre $(X_1 \times \ldots \times X_n) \times X_{n+1}$ y $X_1 \times \ldots \times X_n \times X_{n+1}$.

4. En el caso en el que las colecciones de conjuntos numerables fueran vacías, la unión sería vacía, y, en particular, numerable. En caso contrario, podemos suponer que todas las colecciones de conjuntos de la familia son no vacías. Por ello, para cada $n \in \mathbb{N}$, es posible considerar una aplicación sobreyectiva, $g_n : \mathbb{N} \to \{X_n : n \in N\}$. Sea ahora $g : N \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ la aplicación definida por $g(n, m) = g_n(m)$ para todo $(n, m) \in N \times \mathbb{N}$.

   Veamos que $g$ es sobreyectiva: Dado $a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$, existe $n \in N$ tal que $a \in X_n$ y, dado que $g_n$ es sobreyectiva, existe $m \in \mathbb{N}$ de modo que $g_n(m) = a$. Por tanto, $g(n, m) = a$ y $g$ es sobreyectiva.

   Ahora bien, por el punto 2, como $N$ y $\mathbb{N}$ son numerables, entonces $N \times \mathbb{N}$ también lo es y, por ello, existe una aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to N \times \mathbb{N}$. Finalmente, dado que la composición de aplicaciones sobreyectivas es sobreyectiva, tendremos que la función $h = g \circ f : \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es sobreyectiva, lo que implica que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ es numerable.

$\square$

Del resultado anterior se deduce que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables, y se deja la prueba como ejercicio al lector.

# Capítulo 2

# Espacios métricos

En este capítulo comenzamos estudiando la topología de los espacios métricos, en los que se dispone de más herramientas (la métrica) para poder trabajar. También estudiaremos algunas conceptos propios de los espacios métricos, que no son topológicos, como las sucesiones de Cauchy, la acotación, la completitud, etc.

## 2.1. Espacios métricos

Los espacios métricos incluyen a los espacios pre-hilbertianos y a los espacios normados. De hecho, a partir de un producto escalar se puede definir una norma, y a partir de una norma se puede definir una métrica, como veremos a continuación.

**Definición 2.1.** Sea $V$ un espacio vectorial real. Un *producto escalar* es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que es:

1. Bilineal: $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $x, y, z \in V$.

2. Simétrica: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in V$.

3. Definida positiva: dado $x \in V$, se tiene que $\langle x, x \rangle \geq 0$ y, adicionalmente, $\langle x, x \rangle = 0$ si, y solo si $x = 0$.

**Definición 2.2.** Sea $V$ un espacio vectorial real. Una *norma* es una aplicación $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

1. $||ax|| = |a| \, ||x||$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $x \in V$.

2. Desigualdad triangular: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para todo $x, y \in V$.

3. Dado $x \in V$, entonces $||x|| = 0$ si, y solo si $x = 0$.

Una de las normas más conocidas es la euclídea, presentada como ejemplo a continuación:

**Ejemplo 2.1.** Dado un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, su norma euclídea es el número $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

En el siguiente resultado se recoge una desigualdad satisfecha por cualquier producto escalar sobre un espacio vectorial real, y que será clave para poder definir una norma a partir de un cierto producto escalar.

**Proposición 2.2.** 1. *Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz: si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar sobre el espacio vectorial real $V$, entonces $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$ para todo $x, y \in V$.*

2. *Norma inducida por un producto escalar: si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar sobre un espacio vectorial real $V$, entonces la aplicación definida por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ para todo $x \in V$ es una norma sobre dicho espacio vectorial.*

*Demostración.* 1. Distingamos varios casos:

- Si $x = 0$, entonces, por bilinealidad, se tiene que $0 = \langle 0, y \rangle$ para todo $y \in V$. Además, $\langle 0, 0 \rangle = 0$ por ser la aplicación definida positiva, por lo que $\langle 0, y \rangle^2 \leq \langle 0, 0 \rangle \cdot \langle y, y \rangle$.
- Si $y = 0$, de manera análoga al caso anterior se tiene que $\langle x, 0 \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle 0, 0 \rangle$ para todo $x \in V$.
- Sean $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Entonces, como el producto escalar es una aplicación definida positiva, para todo $k \in \mathbb{R}$ se verifica que $0 \leq \langle x - ky, x - ky \rangle$ y desarrollando, por bilinealidad, el último producto escalar, tenemos que

$$\langle x - ky, x - ky \rangle = \langle x, x \rangle - 2k\langle x, y \rangle + k^2\langle y, y \rangle$$

En particular, si tomamos $k = \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}$, se cumple que

$$0 \leq \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}\langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle^2}\langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} =$$
$$= \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} \leq \langle x, x \rangle \Rightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

con lo que queda culminada la prueba.

2. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar sobre $V$, veamos que la aplicación $\|.\|$ definida por $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ para todo $x \in V$, es una norma, para lo que deben cumplirse las tres condiciones de la Definición 2.2.

   - Sean $a \in \mathbb{R}$ y $x \in V$. Entonces $||ax|| = \sqrt{\langle ax, ax\rangle} = \sqrt{a^2\langle x, x\rangle} = |a| \sqrt{\langle x, x\rangle} = |a|\, ||x||$. Nótese que de la segunda igualdad del desarrollo previo se deduce de la bilinealidad y simetría del producto escalar.
   - Dados $x, y \in V$, nótese que, por la bilinealidad y la simetría del producto escalar, se tiene que

     $$||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle =$$

     $$= \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$$

     Por otro lado, de la desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz se desprende que

     $$\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} = ||x|| \cdot ||y||$$

     lo que implica que

     $$||x + y||^2 \leq \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle \leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$$

     expresión en la que tomando raíz cuadrada, se tiene la desigualdad buscada.
   - Sea $x \in V$. Notemos que $||x|| = 0$ si, y solo si $\langle x, x\rangle = 0$, pero esto es equivalente, por ser el producto escalar una aplicación definida positiva, a que $x = 0$.

$\square$

Introducimos a continuación la definición de espacio métrico.

**Definición 2.3.** Sea $X$ un conjunto. Una *distancia* (o *métrica*) en $X$ es una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ que cumple las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) = 0$ si, y solo si $x = y$ para todo $x, y \in X$.
2. Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
3. Desigualdad triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Si $d$ es una distancia en $X$, diremos que $(X, d)$ es un espacio métrico.

Toda norma genera una distancia y toda distancia en $X$ induce una distancia en cualquier subconjunto $A \subseteq X$, tal y como indica el siguiente resultado.

**Proposición 2.3.** *1. Distancia inducida por una norma: si $\|.\|$ es una norma sobre un espacio vectorial $X$, entonces la aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ dada por $d(x,y) = ||x-y||$ para todo $x, y \in X$, es una distancia en $X$.*

*2. Distancia inducida en un subespacio: Si $(X,d)$ es un espacio métrico, entonces $d_{A\times A} : A \times A \to \mathbb{R}_0^+$ es una distancia en $A \subseteq X$ con $A \neq \emptyset$ y recibe el nombre de distancia inducida en $A$.*

*Demostración.* 1. Veamos que $d$ es una distancia.

*a*) Sean $x, y \in X$. Nótese que $d(x,y) = 0$ si, y solo si $||x-y|| = 0$, lo que equivale, en virtud de la tercera de las propiedades de la norma, a $x - y = 0$, esto es, $x = y$.

*b*) Sean $x, y \in X$. Se tiene, por definición, que $d(x,y) = ||x-y||$, pero en virtud de la primera de las propiedades de la norma, podemos escribir $||x-y|| = ||-(y-x)|| = |-1|\,||y-x|| = ||y-x|| = d(y,x)$, lo que prueba la simetría.

*c*) Consideremos $x, y, z \in X$. Entonces

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$$

de acuerdo con la desigualdad triangular satisfecha por la norma.

2. Veamos que $d_{A\times A}$ es una distancia.

*a*) Dados $x, y \in A$, $d_{A\times A}(x,y) = d(x,y) = 0$ si, y solo si $x = y$, ya que $d$ es una distancia.

*b*) Dados $x, y \in A$, $d_{A\times A}(x,y) = d(x,y) = d(y,x) = d_{A\times A}(y,x)$, ya que $d$ es una distancia.

*c*) Dados $x, y, z \in A$, $d_{A\times A}(x,z) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = d_{A\times A}(x,y) + d_{A\times A}(y,z)$, ya que $d$ es una distancia.

□

**Definición 2.4.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Se define la *bola de centro $x \in X$ y radio $\varepsilon > 0$* como el conjunto $B(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$.

**Ejemplo 2.4.** La *distancia euclídea* es la inducida por la norma euclídea. Por ello, en $\mathbb{R}^n$ con esta métrica, las bolas vendrán dadas por

$$B((x_1,x_2,\ldots,x_n),\varepsilon) = \{(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n : ||(y_1,y_2,\ldots,y_n) - (x_1,x_2,\ldots,x_n)||\} =$$

$$= \{(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2} < \varepsilon\}$$

para todo $\varepsilon > 0$ y todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, si $n = 1$, se tiene que $B(x, \varepsilon) = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

### 2.1.1. Continuidad

El concepto de continuidad se puede definir en un espacio métrico de la siguiente forma.

**Definición 2.5.** Una aplicación $f : X \to Y$ entre dos espacios métricos $X$ e $Y$ se dice que es *continua* en el punto $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x_0, x) < \delta$, entonces $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

**Proposición 2.5.** *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos espacios métricos y $x_0 \in X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$f$ es continua en $x_0$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x_0, x) < \delta$, entonces $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.*

2. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta)$, entonces $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.*

3. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.*

*Demostración.* Demostraremos que 1 implica 2, que 2 implica 3 y que 3 implica 1.

1) $\Rightarrow$ 2). Sea $x_0 \in X$ y supongamos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x_0, x) < \delta$ implica que $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$. Entonces, por la definición de bola (ver Definición 2.4), la implicación anterior se puede reescribir afirmando que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in B(x_0, \delta)$ supone que $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Sea $x_0 \in X$. Si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta)$, entonces $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, la arbitrariedad de $x$ nos permite afirmar que $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$.

3) $\Rightarrow$ 1). Sea $x \in X$ de modo que $d(x_0, x) < \delta$. Entonces $x \in B(x_0, \delta)$, con lo que $f(x) \in f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ y, así, $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, lo que implica que $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$.

□

**Definición 2.6.** Una aplicación $f : X \to Y$ entre dos espacios métricos $X$ e $Y$ se dice que es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

### 2.1.2. Conceptos métricos

En espacios métricos se pueden definir algunos conceptos que no son topológicos. Algunos ejemplos son los siguientes.

**Definición 2.7.** Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $A \subseteq X$.

1. Se dice que $A$ es *acotado* si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) \leq M$ para todo $x, y \in A$.

2. Se dice que $A$ es *totalmente acotado* si para todo $\varepsilon > 0$, existen puntos $x_1, \ldots, x_n \in A$ tales que que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.

3. El *diámetro* de $A$ se define como $\mathrm{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

### 2.1.3. Sucesiones en espacios métricos

A continuación estudiamos el concepto de sucesión y distintos tipos de sucesión que se pueden definir en un espacios métrico.

**Definición 2.8.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico.

1. Una *sucesión* de puntos de $X$ es una aplicación $f : \mathbb{N} \to X$. Se suele usar la notación $x_n = f(n)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o simplemente $(x_n)$ para la sucesión dada por $f$ (esta definición es válida si $X$ es un conjunto, no es necesario que $X$ sea un espacio métrico).

2. $(x_n) \to x$ (la sucesión converge a $x$) si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$.

3. $(x_n) \rightharpoonup x$ (la sucesión adhiere a $x$, o $x$ es un *punto adherente de la sucesión*) si para todo $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n \geq n_0$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$.

4. $(x_n)$ es *de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ para todo $n, m \geq n_0$.

5. $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una *subsucesión* de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si $\sigma$ es estrictamente creciente. Se dice que $f \circ \sigma$ es una subsucesión de $f$. Se usa la notación $(x_{\sigma(n)})$ (esta definición es válida si $X$ es un conjunto, no es necesario que $X$ sea un espacio métrico).

El concepto de espacio métrico completo es muy importante, ya que permite probar una serie de resultados que se usan en otras ramas de las Matemáticas. Veremos algunos ejemplos de estos resultados al final del capítulo.

**Definición 2.9.** Un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy es convergente.

El siguiente resultado relaciona algunos de los conceptos introducidos.

**Proposición 2.6.** *1. Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

*2. Toda sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente es convergente.*

*3. $x$ es un punto adherente de la sucesión $(x_n)$ si, y solo si, existe una subsucesión $(x_{\sigma(n)})$ que converge a $x$.*

*4. Si $(x_n) \to x$, entonces $(x_n) \rightharpoonup x$.*

*5. Si $(x_n) \to x$, entonces $(x_{\sigma(n)}) \to x$, para toda subsucesión $(x_{\sigma(n)})$.*

*Demostración.* 1. Sea $(x_n)$ una sucesión convergente a $x$. Por definición, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon/2)$ para todo $n \geq n_0$, lo que se puede escribir en términos de distancia como $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Es más, si tomamos $p, q \geq n_0$, la desigualdad triangular nos permite afirmar que

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) = d(x_p, x) + d(x_q, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que prueba que la sucesión es de Cauchy.

2. Sea $(x_n)$ una sucesión de Cauchy y supongamos que $(x_{\sigma(n)})$ es una subsucesión de esta que converge a un punto $x \in X$. Con objeto de probar que $(x_n)$ converge a $x$, consideremos $\varepsilon > 0$. Al ser $(x_n)$ de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $p, q \geq n_0$. Por otro lado, como la subsucesión $(x_{\sigma(n)})$ converge a $x$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{\sigma(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_1$.

   Sean $n_2 = \text{máx}\{n_0, n_1\}$ y $n \geq n_2$. Entonces, por la desigualdad triangular de la distancia,
   $$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\sigma(n)}) + d(x_{\sigma(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   En efecto, nótese que $\sigma(n) \geq n \geq n_2 \geq n_0$ y que $n \geq n_2 \geq n_1$, lo que prueba que la sucesión $(x_n)$ converge a $x$.

3. $\Rightarrow$) Sea $x$ un punto adherente de $(x_n)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n \geq n_0$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$. En particular, si tomamos $\varepsilon = 1$ y $n_0 = 1$, entonces existe $n_1 \geq n_0$ tal que $x_{n_1} \in B(x, 1)$. Definamos $\sigma(1) = n_1$. Ahora, si tomamos $\varepsilon = 1/2$, entonces existe $n_2 \geq \sigma(1)+1$ tal que $x_{n_2} \in B(x, 1/2)$. Definamos $\sigma(2) = n_2$. De manera recursiva, podemos definir la aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cumpliendo que

$\sigma(k+1) \geq \sigma(k)+1$ y que $x_{\sigma(k+1)} \in B(x, 1/(k+1))$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nótese que, por construcción, $\sigma$ es estrictamente creciente.

Veamos, finalmente, que la subsucesión $(x_{\sigma(n)})$ converge a $x$. Para ello, obsérvese que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Entonces, por definición de la subsucesión, $d(x, x_{\sigma(k)}) < 1/k \leq 1/n_0 < \varepsilon$ para todo $k \geq n_0$, esto es, $(x_{\sigma(n)})$ converge a $x$.

$\Leftarrow$) Sea $(x_{\sigma(n)})$ una subsucesión de $(x_n)$ que converge a $x$. Por definición de sucesión convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{\sigma(n)} \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_1$. Consideremos ahora $n_0 \in \mathbb{N}$, y tomemos $n \geq n_0$, $n_1$. Como $n \geq n_1$, entonces $x_{\sigma(n)} \in B(x, \varepsilon)$. Dado que $\sigma$ es estrictamente creciente, y toda aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ verifica que $\sigma(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tendremos que $\sigma(n) \geq n \geq n_0$. De esta manera, para $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, hemos encontrado un elemento $\sigma(n) \geq n_0$ tal que $x_{\sigma(n)} \in B(x, \varepsilon)$, lo que prueba que $x$ es un punto adherente de la sucesión $(x_n)$.

4. Sean $(x_n) \to x$, $\varepsilon > 0$ y $n_1 \in \mathbb{N}$. Entonces, por la convergencia de la sucesión a $x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Si $n_1 < n_0$, entonces $x_{n_0} \in B(x, \varepsilon)$ y $n_0 \geq n_1$, mientras que si $n_1 \geq n_0$, entonces $x_{n_1} \in B(x, \varepsilon)$ y obviamente $n_1 \geq n_1$. Así, $x$ es un punto adherente de $(x_n)$.

5. Sea $(x_n)$ una sucesión convergente de un espacio métrico $(X, d)$ y sea $(x_{\sigma(n)})$ una subsucesión de esta. Sea $x$ el límite de la sucesión de partida. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Si $n \geq n_0$, como $\sigma(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sigma(n) \geq n_0$ y, así, $d(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon$, lo que prueba que $(x_{\sigma(n)}) \to x$.

□

El siguiente resultado es clave para probar la convergencia de una sucesión a un determinado punto de un espacio métrico.

**Proposición 2.7.** *$(x_n) \to x$ en un espacio métrico $(X, d)$ si, y solo si $d(x_n, x) \to 0$ en $\mathbb{R}$ con la métrica euclídea.*

*Demostración.* Obsérvese que el hecho de que $d(x_n, x) \to 0$ en $\mathbb{R}$ con la métrica euclídea equivale a que para todo $\varepsilon > 0$, exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|d(x_n, x) - 0| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Pero podemos quitar el valor absoluto de la desigualdad anterior, resultando la afirmación "para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$", que equivale a afirmar que $(x_n)$ es convergente a $x$ en el espacio métrico $(X, d)$. □

El siguiente resultado es de gran utilidad para probar que una sucesión no es de Cauchy, si es el caso.

**Proposición 2.8.** *Sea $(x_n)$ una sucesión en un espacio métrico $(X, d)$ y supongamos que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $d(x_n, x_m) > M$ (o $d(x_n, x_m) \geq M$) para todo $n \neq m$. Entonces $(x_n)$ no tiene puntos adherentes (y, por tanto, tampoco es convergente) y $(x_n)$ no es de Cauchy.*

*Demostración.* Sea $M > 0$. Supongamos que $x$ es un punto adherente de una sucesión $(x_n)$. Entonces, dado $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n \geq n_0$ tal que $d(x_n, x) < \frac{M}{2}$. Igualmente, por ser $x$ un punto adherente de la sucesión, existe $m \geq n+1$ tal que $d(x_m, x) < \frac{M}{2}$. Por tanto, en virtud de la desigualdad triangular,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

una contradicción con que $d(x_n, x_m) > M$ (o $d(x_n, x_m) \geq M$) para todo $n \neq m$. Así, $(x_n)$ no puede tener puntos adherentes y, en consecuencia, no puede ser convergente.

Por otro lado, nótese que $(x_n)$ tampoco puede ser de Cauchy, puesto que, en caso de que lo fuese, dado $M > 0$, existiría un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < M$ para todo $n, m \geq n_0$, lo que es una contradicción con que $d(x_n, x_m) > M$ (o $d(x_n, x_m) \geq M$) para todo $n \neq m$. □

**Proposición 2.9.** *Sean $(X, d)$ un espacio métrico, $A$ un subespacio de $X$ y $(x_n)$ una sucesión de Cauchy en $(X, d)$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy en $(A, d|_{A\times A})$.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)$ es de Cauchy en $(X, d)$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq n_0$ entonces $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Pero entonces $d|_{A\times A}(x_p, x_q) = d(x_p, x_q) < \varepsilon$ para todo $p, q \geq n_0$, con lo que $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy en $(A, d|_{A\times A})$. □

## 2.2. Topología en espacios métricos

Anteriormente hemos definido el concepto de aplicación continua, que es un concepto topológico. A continuación veremos cómo definir otros conceptos topológicos en un espacio métrico.

**Definición 2.10.** Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $U, O, C \subseteq X$.

1. $U$ es un *entorno* de $x$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$.

2. $O$ es *abierto* si es un entorno de todos sus puntos.

3. $C$ es *cerrado* si su complementario $X \setminus C$ es abierto.

Un primer ejemplo de abierto en un espacio métrico es la bola de centro cualquier punto y radio cualquiera cantidad positiva, tal y como se prueba en lo que sigue:

**Observación 2.10.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Entonces $B(x, \varepsilon)$ es abierto para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.*

*Demostración.* Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos $y \in B(x, \varepsilon)$ y definamos $r = \varepsilon - d(y, x)$. Entonces $B(y, r) \subseteq B(x, \varepsilon)$. En efecto, si $z \in B(y, r)$ se tiene que $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < r + d(y, x) = \varepsilon$. Queda así probado que $B(x, \varepsilon)$ es entorno de todos sus puntos y, por ello, es un abierto. □

La siguiente proposición recopila propiedades de los abiertos.

**Proposición 2.11.**

*Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Entonces:*

1. *$\emptyset$ y $X$ son abiertos.*

2. *La intersección finita de abiertos es abierta.*

3. *La unión de abiertos es abierta.*

*Demostración.*

1. $X$ es abierto ya que $B(x, \delta) \subseteq X$ sea cual sea $x \in X$ y $\delta > 0$. El conjunto vacío, $\emptyset$, también es abierto porque, al no tener puntos, es cierto que es entorno de todos sus puntos.

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $\{G_1, \ldots, G_n\}$, una familia de abiertos de $X$. Si $\bigcap_{i=1}^n G_i = \emptyset$, entonces $\bigcap_{i=1}^n G_i$ es abierto por el punto anterior. En caso contrario, sea $x \in \bigcap_{i=1}^n G_i$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, por ser $G_i$ abierto, existe $\delta_i > 0$ tal que $B(x, \delta_i) \subseteq G_i$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Obsérvese que dado $x \in \bigcap_{i=1}^n G_i$, se tiene que $B(x, \delta) \subseteq \bigcap_{i=1}^n G_i$, lo que quiere decir que la intersección de los abiertos considerados es entorno de todos sus puntos y, por tanto, $\bigcap_{i=1}^n G_i$ es abierto.

3. Sea $\{G_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos abiertos de $X$. Si $\bigcup_{i \in I} G_i = \emptyset$, entonces $\bigcup_{i \in I} G_i$ es abierto. En caso contrario, dado $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$, existe $i_o \in I$ tal que $x \in G_{i_o}$. Por ser $G_{i_o}$ abierto, existe $\delta > 0$, tal que $B(x, \delta) \subseteq G_{i_o}$ y, así, $B(x, \delta) \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$, lo que prueba que $\bigcup_{i \in I} G_i$ es un abierto.

□

La siguiente proposición recopila propiedades de los cerrados.

**Proposición 2.12.**

*Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Entonces:*

1. *$\emptyset$ y $X$ son cerrados.*
2. *La unión finita de cerrados es cerrada.*
3. *La intersección de cerrados es cerrada.*

*Demostración.* 1. Los conjuntos $X$ y $\emptyset$ son cerrados porque sus respectivos complementarios, $X \setminus X = \emptyset$ y $X \setminus \emptyset = X$, son abiertos (véase la Proposición 2.11.1).

2. Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos $\{F_1, \ldots, F_n\}$, una familia de conjuntos cerrados de $X$. Entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$, el conjunto $X \setminus F_i$ es abierto. Como $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X \setminus F_i)$ y la intersección finita de abiertos es un abierto (véase la Proposición 2.11.2), luego se sigue que $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es abierto y, por tanto, $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es cerrado.

3. Sea $\{F_i : i \in I\}$ una familia de cerrados de $X$. Puesto que cada conjunto $X \setminus F_i$ es un abierto de $X$, tenemos que $X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus F_i)$, y, por la Proposición 2.11.3, la unión de una familia arbitraria de abiertos de $X$ es un abierto de $X$, entonces tenemos que $X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i$ es un abierto y, consecuentemente, $\bigcap_{i\in I} F_i$ es un cerrado.

$\square$

**Definición 2.11.** Sean $(X,d)$ un espacio métrico y $A \subseteq X$.

1. $x$ es un *punto interior* de $A$ si $A$ es entorno de $x$.
2. El *interior* de $A$, denotado por $A^\circ$ o $Int(A)$, es el conjunto de todos los puntos interiores de $A$.
3. $x$ es un *punto adherente* de $A$ si todo entorno de $x$ corta a $A$.
4. El *cierre* (o *clausura*) de $A$, denotado por $Cl(A)$ o $\overline{A}$, es el conjunto de todos los puntos adherentes de $A$.
5. La *frontera* de $A$, denotada por $Fr(A)$, $Bd(A)$ o $\partial A$, se define por $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

**Definición 2.12.** 1. $x$ es un *punto límite* de $A$ o un *punto de acumulación* de $A$ si todo entorno de $x$ contiene puntos de $A$ distintos de $x$.

2. El *conjunto de acumulación* de $A$ (o *conjunto derivado* de $A$), denotado por $A'$, es el conjunto de todos los puntos de acumulación de $A$.

3. $D$ es *denso* en $X$ si $\overline{D} = X$.

La obtención del interior, cierre y acumulación de un conjunto se puede simplificar empleando bolas, tal y como indica la siguiente caracterización.

**Proposición 2.13** (Caracterización usando bolas)**.** *Sean $(X, d)$ un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces:*

*1. $x \in A^\circ$ si, y solo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.*

*2. $x \in \overline{A}$ si, y solo si $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.*

*3. $x \in A'$ si, y solo si $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.*

*Demostración.* 1. $\Rightarrow$) Si $x \in A^\circ$, entonces $A$ es entorno de $x$, lo que quiere decir que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ (véase la Definición 2.10.1).

$\Leftarrow$) Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$, entonces $A$ es entorno de $x$, lo que quiere decir que $x$ es un punto interior de $A$.

2. $\Rightarrow$) Supongamos que $x \in \overline{A}$. Entonces todo entorno de $x$ corta a $A$ por definición de punto adherente. En particular, $B(x, \varepsilon)$ es un entorno de $x$ que corta a $A$ sea cual sea $\varepsilon > 0$.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Entonces, dado cualquier entorno $U$ de $x$, es posible encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Como $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, se tiene que $U \cap A \neq \emptyset$, esto es, todo entorno de $x$ corta a $A$ y, por ello, $x \in \overline{A}$.

3. $\Rightarrow$) Supongamos que $x \in A'$. Entonces todo entorno de $x$ tiene puntos de $A$ distintos de $x$ por definición. En particular, $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Entonces, dado cualquier entorno $U$ de $x$, es posible encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Como $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, se tiene que $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, esto es, todo entorno de $x$ corta a $A$ en puntos distintos de $x$, lo que significa que $x \in A'$.

□

A continuación se recopilan algunas propiedades del cierre y el interior de un subconjunto de un espacio métrico.

**Proposición 2.14.**

*Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $A, B \subseteq X$. Entonces:*

1. $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$.
2. $A^\circ$ *es abierto.*
3. $A^\circ$ *es el mayor abierto contenido en* $A$.
4. $A^\circ$ *es la unión de todos los abiertos contenidos en* $A$.
5. $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.
6. $\overline{A}$ *es cerrado.*
7. $\overline{A}$ *es el menor cerrado que contiene a* $A$.
8. $\overline{A}$ *es la intersección de todos los cerrados que contienen a* $A$.
9. $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.
10. *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $A^\circ \subseteq B^\circ$ *y* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
11. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
12. $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.
13. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
14. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
15. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.
16. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

*Demostración.*

1. Sea $x \in A^\circ$. Entonces, por la Proposición 2.13.1, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ y, en consecuencia, $x \in A$, lo que prueba la primera inclusión. Ahora bien, como $x \in A$, tenemos que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y la Proposición 2.13.2 nos permite afirmar que $x \in \overline{A}$, lo que justifica la segunda inclusión.

2. Si $A^\circ = \emptyset$, entonces $A^\circ$ es un conjunto abierto contenido en $A$ (véase la Proposición 2.11.1). En otro caso, sea $x \in A^\circ$. Entonces, por la Proposición 2.13.1, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Para cada $y \in B(x, \varepsilon)$, por ser $B(x, \varepsilon)$ abierto, existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $B(y, \varepsilon_y) \subseteq B(x, \varepsilon)$, por lo que $B(y, \varepsilon_y) \subseteq A$ y, por tanto, $y \in A^\circ$. Hemos probado que $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ$ y, en consecuencia, $A^\circ$ es abierto. En cualquier caso, $A^\circ$ es un conjunto abierto contenido en $A$.

3. A partir de los puntos anteriores tenemos que $A^\circ$ es un abierto contenido en $A$. Para ver que es el mayor, sea $G \subseteq X$ un conjunto abierto tal que $G \subseteq A$. Si $G = \emptyset$, entonces $G \subseteq A^\circ$. En otro caso, sea $x \in G$. Por ser $G$ abierto, es entorno de todos sus puntos y, por ello, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq G$. Luego, $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ y, por tanto, $x \in A^\circ$. Así pues, $G \subseteq A^\circ$. Luego, $A^\circ$ es el mayor conjunto abierto contenido en $A$.

4. Sea $B$ la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en $A$. Como $A^\circ$ es un conjunto abierto contenido en $A$ (punto 3), entonces $A^\circ \subseteq B$. Por otra parte, como $B$ es un conjunto abierto contenido en $A$ y $A^\circ$ es el mayor conjunto abierto contenido en $A$ (punto 3), se tiene que $B \subseteq A^\circ$. Luego, $A^\circ = B$.

5. $\subseteq$) Sea $x \in (X \setminus A)^\circ$. Entonces, por la Proposición 2.13.1, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$, de donde se sigue que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$ y, en consecuencia, $x$ no pertenece a $\overline{A}$, esto es, $x \in X \setminus \overline{A}$.

   $\supseteq$) Sea $x \in X \setminus \overline{A}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, pero entonces $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$, lo que implica, de acuerdo con la Proposición 2.13.1, que $x \in (X \setminus A)^\circ$.

6. Es conocido que $A \subseteq \overline{A}$ por el punto 1. Como $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$ por el punto anterior, y $(X \setminus A)^\circ$ es abierto (véase el punto 2), entonces $\overline{A}$ es cerrado (véase la Definición 2.10.3).

7. Por los puntos anteriores (1 y 6) tenemos que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado que contiene a $A$. Sea $F \subseteq X$ otro conjunto cerrado tal que $A \subseteq F$. Entonces $X \setminus F$ es un conjunto abierto tal que $X \setminus F \subseteq X \setminus A$. Como $(X \setminus A)^\circ$ es el mayor conjunto abierto contenido en $X \setminus A$ (véase el punto 3), se sigue que $X \setminus F \subseteq (X \setminus A)^\circ$, pero $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$ (véase el punto 5), luego $\overline{A} \subseteq F$. Por tanto, $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a $A$.

8. Sea $B$ la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a $A$. Como $\overline{A}$ es un conjunto cerrado que contiene a $A$ (punto 6), entonces $B \subseteq \overline{A}$. Por otra parte, como $B$ es un conjunto cerrado que contiene a $A$ y $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a $A$ (punto anterior), entonces $\overline{A} \subseteq B$. En definitiva, tenemos que $\overline{A} = B$.

9. Teniendo en cuenta que $A = X \setminus (X \setminus A)$, por el punto 5 se tiene que

$$X \setminus A^\circ = X \setminus (X \setminus (X \setminus A))^\circ = X \setminus (X \setminus \overline{X \setminus A}) = \overline{X \setminus A}$$

10. Por una parte, si $A \subseteq B$, entonces, por la cadena de inclusiones del punto 1, $A^\circ \subseteq B$, y como $B^\circ$ es el mayor abierto contenido en $B$ (punto 3), entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$.

    Por otro lado, partiendo de que $A \subseteq B$, si consideramos $A = X \setminus C$ y $B = X \setminus D$, entonces $D \subseteq C$, por lo que $D^\circ \subseteq C^\circ$ y, así, $X \setminus C^\circ \subseteq X \setminus D^\circ$. Ahora, aplicando el punto 9 en la última inclusión, queda $\overline{X \setminus C} \subseteq \overline{X \setminus D}$ y, por consiguiente, $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

11. $\subseteq$) Dado que $A \cap B \subseteq A$, por el punto anterior se tiene que $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ$ y, de forma análoga, $(A \cap B)^\circ \subseteq B^\circ$. Por tanto, $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$.

    $\supseteq$) Por el primer punto, $A^\circ \subseteq A$ y $B^\circ \subseteq B$, lo que implica que $A^\circ \cap B^\circ \subseteq A \cap B$. Además, como la intersección finita de abiertos es un abierto (Proposición 2.11.2), se tiene que $A^\circ \cap B^\circ$ es abierto. Es más, $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$ porque $(A \cap B)^\circ$ es el mayor abierto contenido en $A \cap B$ (véase el punto 3).

12. Sea $x \in A^\circ \cup B^\circ$. Entonces $x \in A^\circ$ o $x \in B^\circ$, es decir, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ o existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_2) \subseteq B$. En virtud de lo anterior, podemos garantizar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A \cup B$, lo que implica que $x \in (A \cup B)^\circ$.

13. $\subseteq$) Es clara si tenemos en cuenta el punto 1.

    $\supseteq$) Sea $x \in A^\circ$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq A$. Como $A^\circ$ es el mayor abierto contenido en $A$ (punto 3) y $B(x, \varepsilon)$ es abierto por la Observación 2.10, entonces $B(x, \varepsilon) \subseteq A^\circ \subseteq A$, de donde se sigue que $x \in (A^\circ)^\circ$.

14. $\subseteq$) $\overline{A}$ es un cerrado que contiene a $A$ y $\overline{B}$ es un cerrado que contiene a $B$, de donde $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Por otro lado, como la unión finita de cerrados es cerrada (véase la Proposición 2.12.2), se sigue que $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado. Además, por el punto 7, $\overline{A \cup B}$ es el menor de los cerrados que contienen a $A \cup B$ de donde $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

    $\supseteq$) Por el punto 1, es sabido que $A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$, y como $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, se tiene que $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ (véase el punto 10). Por tanto, $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.

15. Es conocido que $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$, por lo que el punto 10 nos permite afirmar que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A}$ y $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}$. En consecuencia, $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

16. $\subseteq$) Sea $x \in \overline{\overline{A}}$ y supongamos que $x \notin \overline{A}$. Entonces, por el punto 5, $x \in (X \setminus A)^\circ$ que, por el punto 13, es lo mismo que afirmar que $x \in ((X \setminus A)^\circ)^\circ$. Esto quiere decir que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq (X \setminus A)^\circ$. Luego, $B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus (X \setminus A)^\circ) = B(x, \varepsilon) \cap \overline{X \setminus (X \setminus A))} = B(x, \varepsilon) \cap \overline{A} = \emptyset$, lo que es una contradicción con que $x \in \overline{\overline{A}}$. Así, $x \in \overline{A}$.

    $\supseteq$) Es clara por el punto 1.

$\square$

El siguiente resultado recopila varias alternativas para caracterizar la densidad de un conjunto.

**Proposición 2.15** (Caracterización de un conjunto denso). *Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$D$ es denso en $X$.*
2. *Para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$.*
3. *Para todo $x \in X$ y todo $U$ entorno de $x$, $U \cap D \neq \emptyset$.*
4. *Para todo abierto no vacío $G$ de $X$, $G \cap D \neq \emptyset$.*
5. *Para todo $x \in X$ existe una sucesión $(d_n)$ de puntos de $D$ tal que $(d_n) \to x$.*
6. *El único conjunto cerrado que contiene a $D$ es $X$.*

*Demostración.* 1) $\Rightarrow$ 2) Como $D$ es denso en $X$, se tiene que $\overline{D} = X$, pero, usando la caracterización por bolas expuesta en la Proposición 2.13.2, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ sea cual sea $x \in X$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sean $x \in X$ y $U$ un entorno de $x$. Como $U$ es un entorno de $x$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Ahora, como $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$, se deduce que $U \cap D \neq \emptyset$.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $G$ un abierto no vacío. Por definición, $G$ es entorno de todos sus puntos y el punto anterior implica que $G \cap D \neq \emptyset$.

4) $\Rightarrow$ 5) Sea $x \in X$. Por 4), tenemos, en particular, que toda bola abierta corta al conjunto denso. Así, se tiene que $B(x, 1/n) \cap D \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar $d_n \in B(x, 1/n) \cap D$, generando, así, una sucesión, $(d_n)$, de puntos de $D$ tal que $(d_n) \to x$. En efecto, la convergencia es cierta ya que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ y, en consecuencia, $x_n \in B(x, 1/n_0) \subseteq B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$.

5) $\Rightarrow$ 1) Por una parte, es claro que $\overline{D} \subseteq X$. Por otra parte, sea $x \in X$ y consideremos $(d_n) \to x$ con $d_n \in D$. Veamos que $x \in \overline{D}$, para lo que debe cumplirse, en virtud de la caracterización usando bolas de la Proposición 2.13.2, que dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(d_n) \to x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_n \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. En particular $d_{n_0} \in B(x, \varepsilon) \cap D$, de donde se sigue que $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ y, en consecuencia, $x \in \overline{D}$. Así $\overline{D} = X$, lo que significa que $D$ es denso en $X$.

1) $\Rightarrow$ 6) Supongamos que $D$ es denso en $X$, lo que significa que $\overline{D} = X$. Por la Proposición 2.14.7, $\overline{D}$ es el menor cerrado que contiene a $D$, por lo que $X$ es el único cerrado que contiene a $D$.

6) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $D$ no es denso en $X$. Entonces $\overline{D} \neq X$. Como $\overline{D}$ es el menor cerrado que contiene a $D$ (véase la Proposición 2.14.7), entonces hay (al menos) dos cerrados que contienen a $D$, que son su cierre (véase la Proposición 2.14.6) y $X$ (véase la Proposición 2.12.1), lo que contradice el hecho de que el único cerrado que contiene a $D$ sea $X$.

$\square$

En la siguiente proposición se relacionan frontera, cierre, interior y acumulación de un subconjunto de un espacio métrico entre sí y con respecto al propio subconjunto.

**Proposición 2.16.**

1. *$O$ es abierto si, y solo si $O^\circ = O$.*
2. *$C$ es cerrado si, y solo si $\overline{C} = C$.*
3. *$x \in Fr(A)$ si, y solo si todo entorno de $x$ corta a $A$ y a $X \setminus A$.*
4. *$Fr(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$.*
5. *$\overline{A} = A \cup A'$.*
6. *$A$ es cerrado si, y solo si $A' \subseteq A$.*

*Demostración.* 1. $\Rightarrow$) Supongamos que $O$ es abierto. Como $O^\circ$ es la unión de todos los abiertos contenidos en $O$ (véase la Proposición 2.14), se concluye que $O^\circ = O$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $O = O^\circ$. Dado que, por la Proposición 2.14.2, $O^\circ$ es abierto, se deduce que $O$ es abierto.

2. $\Rightarrow$) Supongamos que $C$ es cerrado. Al ser $\overline{C}$ la intersección de todos los cerrados que contienen a $C$ (véase la Proposición 2.14.8), se tiene que $\overline{C} = C$.

   $\Leftarrow$) Supongamos que $\overline{C} = C$. Como el cierre de un subconjunto es cerrado (véase la Proposición 2.14.6), se deduce que $C$ es cerrado.

3. $\Rightarrow$) Sea $x \in Fr(A)$. Sabemos, por la Definición 2.11.5, que $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. Así pues, $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{X \setminus A}$. Dado $U$ entorno de $x$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ por la definición de entorno. Ya solo nos queda emplear la Proposición 2.13.2 para tener que $U$ corta a $A$ y a $X \setminus A$ ya que $B(x, \varepsilon)$ corta a ambos conjuntos.

   $\Leftarrow$) El recíproco es claro, pues si todo entorno de $x$ corta a $A$ y a $X \setminus A$, entonces toda bola centrada en $x$ corta a $A$ (luego $x \in \overline{A}$, por la Proposición 2.13.2) y toda bola de centro $x$ corta a $X \setminus A$ (luego $x \in \overline{X \setminus A}$ por la Proposición 2.13.2). Por tanto, $x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = Fr(A)$.

4. Por la Definición 2.11.5, $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$, pero de acuerdo con la Proposición 2.14.9, $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$, así que $Fr(A) = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \setminus A^\circ$.

5. $\subseteq$) Sea $x \in \overline{A}$. Si $x \in A$, hemos terminado. Supongamos, entonces, que $x \notin A$ y probemos que $x \in A'$. Como $x \in \overline{A}$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, pero como $x \notin A$, debe existir $z \neq x$ tal que $z \in B(x, \varepsilon) \cap A$. Por tanto, $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, lo que significa que $x \in A'$ en virtud de la Proposición 2.13.3.

   $\Leftarrow$) Recíprocamente, veamos que $A \subseteq \overline{A}$ y que $A' \subseteq \overline{A}$ para tener, en consecuencia, que $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. La primera inclusión queda justificada en la Proposición 2.14.1. En cuanto a la segunda, si $x \in A'$, entonces, por la Proposición 2.13.3, tenemos que $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$, por lo que también es cierto que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$, lo que implica que $x \in \overline{A}$ en virtud de la Proposición 2.13.2.

6. $\Rightarrow$) Si $A$ es cerrado, entonces, usando los puntos 2 y 5, tenemos que $A = \overline{A} = A \cup A'$, de donde se sigue que $A' \subseteq A$.

   $\Leftarrow$) Si $A' \subseteq A$, entonces, gracias al punto anterior, podemos escribir $\overline{A} = A \cup A' = A$, por lo que $\overline{A} = A$, de donde se deduce, en virtud del punto 2, que $A$ es cerrado.

□

Se puede estudiar si un punto de un espacio métrico pertenece al interior, cierre o acumulación de un subconjunto en base a la convergencia de sucesiones, tal y como muestra la siguiente proposición.

**Proposición 2.17** (Caracterización por sucesiones)**.**

1. *$x \in A^\circ$ si, y solo si para toda sucesión $(x_n)$ que converja a $x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq n_0$.*

2. *$x \in \overline{A}$ si, y solo si existe una sucesión de elementos de $A$ que converge a $x$.*

3. *$x \in A'$ si, y solo si existe una sucesión de elementos de $A$ y distintos de $x$ que converge a $x$.*

*Demostración.* 1. $\Rightarrow$) Supongamos que $x \in A^\circ$. Entonces es posible considerar $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_0) \subseteq A$ (véase la Proposición 2.13.1). Consideremos, ahora, $(x_n)$, una sucesión convergente a $x$, y probemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$, para todo $n \geq n_0$. Como $(x_n)$ converge a $x$, la Definición 2.8.2 nos permite afirmar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$, para todo $n \geq n_0$. En particular, para $\varepsilon_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon_0) \subseteq A$ para todo $n \geq n_0$.

$\Leftarrow$) Supongamos que para toda sucesión $(x_n)$ convergente a $x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in A$ para todo $n \geq n_0$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $x \notin A^\circ$, lo que implica que cualquier bola de centro $x$ contiene puntos que no son de $A$. Podemos construir, entonces, la sucesión siguiente:

Para $n = 1$, tomamos $x_1 \in B(x, 1)$ con $x_1$ no perteneciente a $A$.

Para $n = 2$, tomamos $x_2 \in B(x, 1/2)$ con $x_2$ no perteneciente a $A$.

En general, el término $n$-ésimo de la sucesión será el resultado de tomar $x_n \in B(x, 1/n)$ con $x_n$ no perteneciente a $A$.

Ahora comprobamos que la sucesión construida es convergente a $x$, obteniendo así una contradicción con la suposición de partida, lo que justifica que $x \in A^\circ$. La convergencia se puede probar haciendo uso de la Proposición 2.7:

$$x_n \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

por lo que $(x_n) \to x$.

2. $\Rightarrow$) Sea $x \in \overline{A}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ de acuerdo con la Proposición 2.13.2. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, es cierto que $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, es posible construir una sucesión de modo que el término $n$-ésimo pertenezca a $B(x, 1/n) \cap A$. Dicha sucesión es, de hecho, convergente a $x$ ya que (véase la Proposición 2.7)

$$x_n \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

de donde $(x_n) \to x$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in X$ y consideremos $(x_n) \to x$ con $x_n \in A$. Veamos que $x \in \overline{A}$. Para ello, hemos de probar que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (véase la Proposición 2.13.2). Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, por la Definición 2.8, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Por tanto, $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A$ para todo $n \geq n_0$, de donde $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, tal y como buscábamos.

3. $\Rightarrow$ ) Sea $x \in A'$. Entonces, por la Proposición 2.13.3, para cada $n \in \mathbb{N}$, es cierto que $B(x, 1/n) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Ahora construimos la sucesión $(x_n)$ de modo que $x_n \in B(x, 1/n) \cap (A \setminus \{x\})$ y probamos que es convergente a $x$ haciendo uso de la Proposición 2.7:

$$x_n \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

de donde $(x_n) \to x$.

$\Leftarrow$) Consideremos la sucesión $(x_n) \to x$ de modo que $x_n \in A \setminus \{x\}$. Para probar que $x \in A'$, hemos de justificar que para todo $\varepsilon > 0$, se cumple que $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ (véase la Proposición 2.13.3). Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n) \to x$, por la Definición 2.8, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$. Como, además, $x_n \in A \setminus \{x\}$, se deduce que $x_n \in B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\})$ para todo $n \geq n_0$, de donde $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ y, en consecuencia, $x \in A'$.

□

**Proposición 2.18** (Caracterización local de la continuidad)**.** *Sean $(X, d)$ e $(Y, \rho)$ dos espacios métricos, $f : X \to Y$ una aplicación y $x_0 \in X$. Son equivalentes:*

1. *$f$ es continua en $x_0$.*
2. *Para todo entorno $V$ de $f(x_0)$, existe un entorno $U$ de $x_0$ tal que $f(U) \subseteq V$.*
3. *Para todo entorno $V$ de $f(x_0)$, $f^{-1}(V)$ es un entorno de $x_0$.*
4. *Si $(x_n)$ es una sucesión que converge a $x_0$, entonces la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.*

*Demostración.* 1) $\Rightarrow$ 2) Sea $V$ un entorno de $f(x_0)$. Entonces, por definición, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq V$. Como $f$ es continua en $x_0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$, entonces $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Sea $U = B(x, \delta)$ y veamos que $f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ en cuyo caso tendremos que $f(U) \subseteq V$. Para ello, sea $x \in U = B(x, \delta)$. Entonces $d(x, x_0) < \delta$, lo que implica, por la continuidad de $f$ en $x_0$, que $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, es decir, $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. Por tanto $f(U) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ como queríamos probar.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $V$ un entorno de $f(x_0)$. Entonces, por hipótesis, existe un entorno $U$ de $x_0$ tal que $f(U) \subseteq V$. Aplicando la imagen inversa de $f$ a los dos miembros, obtenemos que $f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$. Es conocido que $U \subseteq f^{-1}(f(U))$, por lo que $U \subseteq f^{-1}(V)$ y, en consecuencia, $f^{-1}(V)$ es un entorno de $x_0$.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $(x_n)$ una sucesión que converge a $x_0$. Para ver que la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$, sea $\varepsilon > 0$. Entonces $B(f(x_0), \varepsilon)$ es un entorno de $f(x_0)$, por lo que, por hipótesis, $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ es un entorno de $x_0$, así que existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Como $(x_n)$ converge a $x_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ para todo $n \geq n_0$, de donde $f(x_n) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ para todo $n \geq n_0$, esto es, la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.

4) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $f$ no es continua en $x_0$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $d(x_\delta, x_0) < \delta$ pero $d(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ pero $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$.

Nótese ahora que la condición $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implica que la sucesión $(x_n)$ converge a $x_0$, si bien el hecho de que $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ supone que $(f(x_n))$ no converge a $f(x_0)$, lo que supone una contradicción con respecto a la hipótesis de partida. Por tanto, $f$ tiene que ser continua en $x_0$.

$\square$

**Proposición 2.19** (Caracterización global de la continuidad)**.** *Sean* $(X, d)$ *e* $(Y, \rho)$ *dos espacios métricos y* $f : X \to Y$ *una aplicación. Son equivalentes:*

1. *$f$ es continua.*

2. *Para todo abierto $O$ en $Y$, $f^{-1}(O)$ es un abierto en $X$.*

3. *Para todo cerrado $C$ en $Y$, $f^{-1}(C)$ es un cerrado en $X$.*

4. *$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.*

*Demostración.* 1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $f$ es continua y consideremos un abierto $O \in Y$. Veamos que $f^{-1}(O)$ es abierto, para lo que debemos probar que es entorno de todos sus puntos. Sea $x \in f^{-1}(O)$. Entonces $f(x) \in O$ y, como $O$ es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq O$. Por otra parte, como $f$ es continua, para dicho $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq O$, lo que implica que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(O)$. La arbitrariedad de $x$ nos permite afirmar que $f^{-1}(O)$ es entorno de todos sus puntos y, por ello, es un abierto de $X$.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $C$ un cerrado en $Y$. Entonces su complementario, $Y \setminus C$, es abierto y, por tanto, la hipótesis de partida supone que $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$ es abierto, de donde se deduce que $f^{-1}(C)$ es cerrado en $X$.

3) $\Rightarrow$ 4) Sea $A \subseteq X$. Entonces, en virtud de la Proposición 2.14.1, $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$, por lo que al aplicar la preimagen de $f$, resulta que $f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Por ello, $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$. Como $\overline{f(A)}$ es cerrado en $Y$, la hipótesis de partida nos da que $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado en $X$ y, por tanto, $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$, ya que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a $A$ (véase la Proposición 2.14.7), concluyendo, así, que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

4) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $f$ no es continua, es decir, existen $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ tales que para todo $\delta > 0$, $f(B(x, \delta)) \nsubseteq B(f(x), \varepsilon)$. Entonces $B(x, \delta) \nsubseteq f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ y, por tanto, $B(x, \delta) \cap (X \setminus f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))) \neq \emptyset$ para todo $\delta > 0$. La igualdad anterior implica que $x \in \overline{X \setminus f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))}$ (véase la Proposición 2.13.2), por lo que, por hipótesis,

podemos afirmar que $f(x) \in \overline{f(X \setminus f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)))}$, lo que quiere decir que $B(f(x), \varepsilon) \cap f(X \setminus f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)))$. Ahora, como para todo $A \subseteq X$ se cumple que $f(X \setminus A) \subseteq Y \setminus f(A)$, tenemos que $B(f(x), \varepsilon) \cap (Y \setminus f(f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)))) \neq \emptyset$. Aplicando la preimagen de $f$, queda $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \cap f^{-1}(Y \setminus f(f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)))) = f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \cap (Y \setminus f^{-1}(f(f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))))) \neq \emptyset$. Finalmente, como al cumplirse $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, se tiene que $X \setminus A \supseteq X \setminus f^{-1}(f(A))$, esto supone que $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) \cap (X \setminus f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))) \neq \emptyset$, una contradicción, ya que dichos conjuntos son disjuntos.

□

## 2.3. Algunos teoremas sobre espacios métricos completos

En esta sección recopilamos algunos teoremas clásicos relacionados con espacios métricos completos.

### 2.3.1. Teorema del punto fijo de Banach

**Definición 2.13.** Sean $(X, d)$, $(Y, \rho)$ espacios métricos. $f : X \to Y$ es una *aplicación de Lipschitz* si existe $k \geq 0$ tal que $\rho(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ para todo $x, y \in X$. El menor $k$ que verifica la desigualdad se llama *constante de Lipschitz* de $f$. $f$ es una *contracción* (o *aplicación contractiva*) si $k < 1$, en cuyo caso $k$ se llama *factor de contracción* de $f$.

**Teorema 2.20** (Teorema del punto fijo de Banach)**.** *Sean $(X, d)$ un espacio métrico completo y $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces $f$ tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

*Demostración.* Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo y consideremos $\alpha \in [0, 1[$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Demostraremos, en primer lugar, la existencia del punto fijo y, posteriormente, su unicidad. Para probar la existencia, fijamos un punto cualquiera $x_0 \in X$ y definimos, por recurrencia, la sucesión $(x_n)$ tal que $x_1 = f(x_0)$ y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que $(x_n)$ es una sucesión de Cauchy en $X$. Primero, probamos por inducción que $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

- Para $n = 1$, la desigualdad es cierta, ya que $d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq \alpha d(x_0, x_1)$.
- Lo suponemos cierto para $n$, esto es, $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1)$, y lo probamos para $n + 1$: $d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^{n+1} d(x_0, x_1)$.