Introducción

Este texto ha sido cuidadosamente diseñado con el objetivo de brindar un sólido apoyo a aquellos estudiantes que dan sus primeros pasos en el ámbito del Análisis Funcional lineal y surge de la necesidad de disponer de una guía de problemas resueltos en español para esta materia. Con un enfoque eminentemente práctico, este manual ofrece una amplia colección de 190 ejercicios resueltos, cada uno de ellos detallado con un nivel de profundidad que facilita su comprensión. Esto permite al estudiante, no solo disponer de una gran colección de problemas, sino también comprender el razonamiento detrás de cada paso. Además, la variedad de ejercicios abordados garantiza que se cubran todos los aspectos importantes relativos a un curso de Análisis Funcional en universidades españolas, desde conceptos básicos hasta aplicaciones más avanzadas.

El Análisis Funcional surge a raíz de la necesidad de dar respuesta a problemas sobre funciones cuyas variables independientes son también funciones, lo que en la actualidad identificamos bajo el nombre de funcionales. Fundamentalmente, esta disciplina tiene como punto de partida el estudio de transformaciones tales como la transformación de Fourier y de las ecuaciones diferenciales e integrales. A partir del siglo XX se entiende el Análisis Funcional como el encargado de estudiar los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales equipados con una norma completa, es decir, los llamados espacios de Banach. Como ejemplo fundamental de los espacios de Banach, surgen los espacios de Hilbert, acompañados de la noción de producto escalar. Tales espacios han contribuido de manera sobresaliente a la formulación matemática de la mecánica cuántica. En la actualidad, el Análisis Funcional abarca el estudio de una cantidad más amplia de espacios tales como los espacios de Fréchet o los espacios vectoriales localmente convexos, conservando siempre la estructura topológica.

Esta guía de ejercicios resueltos carece de completo sentido si no se acompaña de un buen manual teórico que aborde los detalles más fundamentales del Análisis Funcional lineal. Es por ello que nos vemos obligados a realizar algunas recomendaciones en lo que a complementos refiere. Textos como los de Abuabara y Lesmes [1], Albiac y Kalton [2], Alt [3], Megginson [7], Muscat [8], Rudin [9] o Yosida [11], pueden suponer un aconsejable punto de partida de cara a recorrer el sendero que traza tal área de las matemáticas.

El primer capítulo lo dedicaremos, fundamentalmente, a presentar un buen número de ejercicios resueltos en el conocido contexto de los espacios métricos. El concepto abstracto de espacio métrico encuentra en la recta real su ejemplo por antonomasia, de modo que la distancia entre dos números reales x e y no es otra cosa que la longitud del intervalo de la recta de extremos correspondientes x e y. Por supuesto, no pierda de vista que una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ se dirá que es una métrica sobre el conjunto no vacío X si los siguientes axiomas son satisfechos:

(M1) Bondad de ajuste: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(M2) No negatividad: $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in X$.

(M3) Simetría: $d(x, y) = d(y, x)$, para cualesquiera $x, y \in X$.

(M4) Desigualdad triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para arbitrarios $x, y, z \in X$.

Para el completo entendimiento de este capítulo deberán tenerse en mente conceptos básicos como la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Minkowski, la convergencia de sucesiones, el teorema del punto fijo de Banach o como demostrar que un espacio métrico de dimensión finita o infinita es completo.

En el segundo capítulo entraremos a trabajar con espacios normados. A tal efecto, no pierda de vista que una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definirá una norma sobre un conjunto no vacío X si cumple las siguientes condiciones:

(N1) No negatividad: $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$.

(N2) Bondad de ajuste: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N3) Positivamente homogénea: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, para cualesquiera $x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$.

(N4) Desigualdad triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para arbitrarios $x, y \in X$.

A lo largo de la resolución de los diferentes ejercicios nos serviremos de la noción de espacio vectorial, así como de subespacio vectorial. Serán importantes además los conceptos de base de Hamel, así como la dimensión de un espacio vectorial X para abordar los problemas. Llamaremos base de Hamel de un espacio vectorial X a cualquier familia $\{e_i : i \in I\}$ de vectores tales que para $v \in X$ existe un único conjunto finito $F \subset I$ tal que

$$v = \sum_{i \in F} \alpha_i e_i,$$

para convenientes $\alpha_i \in \mathbb{K}, i \in F$.

Se dotará a los espacios normados de la propiedad de completitud, para obtener así los tan ansiados espacios de Banach. Resultará importante conocer el lema de las traslaciones, que indica que es condición necesaria para que una métrica d provenga de una norma, que se cumplan las siguientes dos condiciones: $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ y $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$, para cualesquiera $x, y, z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

Caracterizar la completitud de los subespacios de un Banach en términos de ser cerrados resulta otro de los resultados vitales, a conocer, de este capítulo. Además, es bien sabido que un espacio normado será completo si toda serie absolutamente convergente es convergente. Merce la pena recordar, además, que una sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de un normado X se dirá que es una base de Schauder si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

En espacios normados de dimensión finita simplemente nos interesará recordar que, sobre ellos, todas las normas son equivalentes como consecuencia inmediata del teorema de Hausdorff. Conocer la definición de compacidad de un conjunto en términos secuenciales resulta tan necesario como elemental. Además, sobre espacios euclídeos, sabemos que la compacidad queda completamente caracterizada a través del teorema de Heine–Borel–Lebesgue. De hecho, el teorema de Riesz nos indicará que un espacio normado X es de dimensión finita si, y solo si, su bola unidad cerrada es compacta.

Uno de los conceptos fundamentales del Análisis Funcional surge en este capítulo, y es que hablaremos de la noción de operador sobre espacios normados. Será clave conocer el concepto de linealidad y acotación de un operador, así como el teorema del operador inverso, que nos proporcionará condiciones para su existencia. Evidentemente, sobre espacios normados de dimensión finita la cuestión trivializa, y es que todo operador lineal resultará automáticamente continuo (equivalentemente, acotado). Más aún, en el contexto finito, se puede establecer una relación biunívoca entre matrices y operadores, de modo que cada matriz determina un único operador y recíprocamente. Si restringimos el rango de un operador al cuerpo de escalares $\mathbb{K}$, entonces tendremos entre nuestras manos los llamados funcionales. A raíz de ellos surgen dos nociones fundamentales y que dan sentido por sí mismas a esta rama de las matemáticas: el dual algebraico y el dual topológico de un espacio normado X. El primero, denotado X', se corresponde con el conjunto de todos los funcionales lineales con dominio X, mientras que el segundo, notado X^*, será el espacio de todos los funcionales lineales y continuos definidos sobre X. Este último resulta, además, un espacio de Banach equipado con la norma canónica.

El tercer capítulo estará dedicado, en su totalidad, a trabajar los espacios con producto interior. A tal efecto, recuerde que una aplicación $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ se dice que es un producto interior sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial X si son satisfechas las siguientes cuatro propiedades:

(P1) $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$, cualesquiera que sean $x, y, z \in X$.

(P2) $(\alpha x|y) = \alpha(x|y)$, para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

(P3) $\overline{(x|y)} = (y|x)$, para todo $x, y \in X$.

(P4) $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Es decir, el producto escalar es lineal en su primera variable y conjugado lineal en la segunda, lo que comúnmente se conoce como una aplicación sesquilineal (del Latín, sesqui, una vez y media).

Resultará conveniente hablar de los espacios de Hilbert como aquellos espacios con producto interior que verifican ser completos. Necesario será tener en cuenta la identidad del paralelogramo, así como el teorema de Jordan y von Neumann, encargado de caracterizar cuando una norma proviene de un producto escalar, y que recordamos a continuación.

Teorema 0.1 (de Jordan–Von Neumann) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces existirá un producto escalar $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{K}$ tal que $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ si, y solo si*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \qquad \forall x, y \in X.$$

No perdamos de vista el concepto de ortogonalidad, la principal novedad en este nuevo ambiente. Dos vectores $x, y \in X$ se dirá que son ortogonales, y lo denotaremos por $x \perp y$, si $(x|y) = 0$. Otro de los resultados importantes será la desigualdad de Cauchy–Schwarz–Bunyakowski.

Dos teoremas fundamentales asociados a este capítulo resultarán el teorema de aproximación óptima en espacios de Hilbert y el teorema de la proyección ortogonal que a continuación recordamos.

Teorema 0.2 (de aproximación óptima en espacios de Hilbert) *Sea S un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Para cada $x \in H$ existe un único $x_0 \in S$ tal que*

$$\|x - x_0\| \leq \text{ínf}\{\|x - y\| : y \in S\} = d(x, S).$$

Teorema 0.3 (de la proyección ortogonal) *Sea H un espacio de Hilbert y consideremos M un subespacio cerrado de H. Entonces, cada $x \in H$ admite una única descomposición de la forma*

$$x = m + n, \qquad (m \in M, n \in M^{\perp}).$$

Además, para este x, el punto $p_M(x) = m \in M$ está caracterizado por ser el único vector en M tal que $x - p_M(x) \in M^{\perp}$, y la aplicación $x \mapsto p_M(x)$ es lineal, continua, de norma 1 cuando M es no trivial y verificando que

(i) $p_M^2 = p_M$.

(ii) $\ker(p_M) = M^{\perp}$.

Asimismo, H se obtiene como suma directa de M y $M^{\perp}$. A p_M se le llama proyección ortogonal de H asociada a M, y a $M^{\perp}$ se le llama complemento ortogonal de M en H.

Los conjuntos y las sucesiones ortonormales deberán estar en la mente del lector a la hora de trabajar este capítulo. Ello se complementará con la desigualdad de Bessel, que nos introducirá los llamados coeficientes de Fourier. El proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt, si bien es una herramienta propia de cualquier curso básico de Álgebra Lineal, conviene tenerla presente a la hora de desarrollar algún ejercicio.

Además, conviene anotar el concepto de subconjunto total de un espacio con producto escalar X como aquel cuya envolvente lineal cerrada es densa en el propio X. Será clave la noción de sistema ortonormal maximal. Además, recuerde que un espacio con producto interior es Hilbert si todo sistema ortonormal maximal es un sistema ortonormal total. Igualmente, un subconjunto M de un Hilbert H se dirá que es total si, y solo si, se alcanza la igualdad en la desigualdad de Bessel (lo que comúnmente se conoce como la Identidad de Parseval).

Casi con total seguridad podemos garantizar que, en lo que a este tercer capítulo refiere, el resultado más importante a conocer se corresponde con el teorema de representación de Riesz de funcionales lineales.

Teorema 0.4 (de representación de Riesz) *Si H es un espacio de Hilbert y f es cualquier funcional lineal y acotado definido sobre él, entonces existe un único $y \in H$ tal que*

$$f(x) = (x|y), \qquad \forall x \in H.$$

Además, $\|f\| = \|y\|$.

Asociado a un operador lineal y continuo entre espacios de Hilbert $T : H_1 \to H_2$, encontraremos su operador adjunto $T^\times : H_2 \to H_1$ tal que para cada par $(x, y) \in H_1 \times H_2$ satisface la relación

$$(T(x)|y) = (x|T^\times(y)).$$

Este operador siempre existe, es único, lineal, continuo y con norma $\|T^\times\| = \|T\|$. Nos centraremos, esencialmente, en tres subtipos de operadores lineales y acotados entre espacios de Hilbert: auto-adjuntos, unitarios y normales.

El cuarto capítulo de este manual es el que da sentido por si mismo a la asignatura de Análisis Funcional que pueda cursarse en cualquier universidad. En este, abordaremos los teoremas que constituyen los pilares fundamentales del Análisis Funcional. Para ello, deberán tenerse en cuenta nociones de superlativa importancia, como el archiconocido lema de Zorn, íntimamente relacionado con el axioma de elección, el principio de buena ordenación o el principio de inducción transfinita que a continuación recordamos.

Teorema 0.5 (Principio de inducción transfinita) *Sea $(X, \leq)$ un conjunto bien ordenado, y sea $\emptyset \neq A \subset X$ tal que satisface la hipótesis de inducción transfinita:*

$$I(a) \subset A \Rightarrow a \in A.$$

Entonces $A = X$.

Uno de los tres pilares fundamentales del Análisis Funcional lo conforma el teorema de Hahn–Banach. Para ello, será preciso hablar antes del concepto de funcional sublineal. Una vez recordado este, se podrá enunciar tal teorema en su versión para espacio vectoriales reales.

Teorema 0.6 (de Hahn–Banach) *Sea X un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, p un funcional sublineal en X y Z un subespacio de X. Sea $f : Z \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que*

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in Z.$$

Entonces existe $\tilde{f}$, extensión lineal de f a todo X, tal que

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in X.$$

Además del teorema clásico de Hahn–Banach, pueden presentarse algunas versiones refinadas de este, como lo son el teorema de Hahn–Banach generalizado (es decir, para $\mathbb{C}$-espacios vectoriales), el teorema de Hahn–Banach para espacios normados y el teorema de Hahn–Banach para funcionales lineales y acotados. A destacar, en especial, serán el segundo y el tercero.

Teorema 0.7 (de Hahn–Banach para espacios normados) *Sea Z un subespacio de un espacio normado X. Entonces para cada funcional lineal y acotado f definido sobre Z podemos encontrar un funcional $\tilde{f}$ lineal y acotado que extiende a f a todo X y que preserva la norma.*

Teorema 0.8 (de Hahn–Banach para funcionales lineales y acotados) *Sea $X \neq \{0\}$ un espacio normado y $x_0 \in X - \{0\}$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Aunque quizás supere las expectativas de un primer curso de Análisis Funcional lineal, no está de más mencionar los duales topológicos asociados a dos espacios normados concretos. En primer lugar, se comenta que el dual de $\mathcal{C}([a,b])$ se corresponde con el espacio de las funciones de variación acotada $\mathrm{BV}([a,b])$. Por su parte, el dual del espacio secuencial ℓ_∞ se corresponderá con el espacio de las medidas de Borel regulares definidas sobre $\beta\mathbb{N}$ por el teorema de representación de Riesz, donde $\beta\mathbb{N}$ se corresponde con la compactificación de Stone–Čech del conjunto de los números naturales.

En el contexto de los espacios normados también habrá de tenerse en cuenta la noción de operador adjunto. La idea no será otra que hacer corresponder a cada operador lineal y acotado entre espacios normados $T : X \to Y$, el operador $T^* : Y^* \to X^*$ definido como:

$$T^*(y^*) = y^* \circ T \qquad \forall y^* \in Y^*.$$

Entre sus propiedades se tendrá que tal operador es lineal y continuo verificando $\|T^*\| = \|T\|$. Además, cuando tenga sentido, puede ser relacionado con el ya conocido operador adjunto en espacios de Hilbert $T^\times$ a través de biyecciones conjugado lineales e isométricas.

Otro de los conceptos importantes a tener en mente es el de reflexividad. No deberá perderse de vista que un espacio normado X se dirá reflexivo si el embebimiento natural canónico $C_X : X \to X^{**}$ es sobreyectivo; siendo ya de partida una isometría lineal, lo que nos dará un isomorfismo lineal isométrico entre X y su bidual X^{**}. Es decir, surge naturalmente que todo espacio reflexivo será un Banach. Más aún, todo espacio de Hilbert será reflexivo. No obstante, debe tenerse en cuenta que si X es isométricamente isomorfo a su bidual, este no es necesariamente reflexivo (puede notarse como ejemplo el espacio de James). A destacar es el siguiente resultado:

Teorema 0.9 (de separabilidad) *Si X^* es separable, entonces X también lo será.*

El segundo de los pilares fundamentales del Análisis Funcional lo constituye el principio de acotación uniforme o teorema de Banach–Steinhaus. Previo a ello, deben conocerse las definiciones de conjunto raro (si su cierre no tiene puntos interiores), de conjunto de primera categoría (si es unión numerable de conjuntos raros) y de conjunto de segunda categoría (si no es de primera categoría). Ello nos permitirá recordar el teorema de categoría de Baire:

Teorema 0.10 (de categoría de Baire) *Todo espacio métrico completo es de segunda categoría.*

Este constituirá una herramienta fundamental en la demostración del principio de acotación uniforme, que a continuación enunciamos.

Teorema 0.11 (Principio de acotación uniforme) *Sean X, Y espacios normados y sea $\{T_i : i \in I\}$ una familia de elementos de $\mathcal{L}(X, Y)$. Supongamos que X es completo. Si para todo $x \in X$ existe $c_x > 0$ tal que $\|T_i(x)\| \leq C_x$, para todo $i \in I$, entonces existe $c > 0$ tal que $\|T_i\| \leq c$, para todo $i \in I$. Es decir, si la familia de operadores lineales y continuos está puntualmente acotada, entonces estará uniformemente acotada.*

Se realizará un pequeño inciso en la convergencia débil y fuerte de sucesiones, aunque no sea propio de un curso de estas características. En realidad, la única novedad reside en la convergencia débil de sucesiones, cuya definición requiere del uso de funcionales lineales y acotados, y es que diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a $x \in X$ si, y solo si, $(f(x_n)) \to f(x)$ para todo $f \in X^*$. Como cabe esperar, si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un normado X converge fuertemente, será entonces débilmente convergente. El recíproco no es cierto en general, aunque sí se dará cuando X resulte de dimensión finita.

En cuanto a la convergencia de sucesiones de operadores, se darán tres tipos: la convergencia en la norma canónica de operadores (convergencia uniforme), la convergencia fuerte de operadores (convergencia puntual) y la convergencia débil de operadores. La primera de ellas implica la segunda y esta, a su vez, la tercera. Lo recíprocos, sin embargo, no serán ciertos en general. Un trabajo similar puede realizarse en lo referente a la convergencia de funcionales, donde se nota que los conceptos de convergencia fuerte y débil coinciden. Será aquí de interés la llamada convergencia débil*. Diremos que una sucesión de funcionales $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^* converge en la topología débil* a $f \in X^*$ si $(f_n(x)) \to f(x)$, para todo $x \in X$.

Deberán tenerse en cuenta las propiedades del operador límite, T, de una sucesión convergente $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Si la convergencia es uniforme, se verificará que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. No obstante, si la convergencia es puntual, se habrá de imponer además que sea X un espacio de Banach para poder garantizar la linealidad y acotación de T.

Como curiosidad, la convergencia débil* presenta algunas aplicaciones a la sumabilidad de sucesiones y series, apareciendo con especial predominancia en los llamados A-métodos y en cuestiones relativas a problemas numéricos de integración, diferenciación e interpolación, aspectos bien conocidos de materias como el cálculo numérico.

Finalmente, el tercer pilar fundamental del Análisis Funcional lo constituirá el teorema de la aplicación abierta. Para abordar este, será clave evidentemente definir qué se entiende por aplicación abierta. Una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ entre dos métricos X, Y con $\mathcal{D}(T) \subset X$, se dirá que es abierta si, y solo si, para cada abierto $A \subset \mathcal{D}(T)$, es $T(A)$ abierto en Y. El teorema de la aplicación abierta encontrará en el siguiente lema un apoyo fundamental.

Lema 0.12 *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si T es sobreyectiva, entonces la imagen por T de la bola unidad abierta de X, contiene alguna bola abierta en Y conteniendo al origen.*

Con ello, se recuerda el tercer pilar fundamental.

Teorema 0.13 (de la Aplicación Abierta) *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Si T es sobreyectiva, entonces T es abierta.*

Como consecuencia del teorema de la aplicación abierta surgen dos teoremas de gran peso, el teorema de la gráfica cerrada y el teorema de los isomorfismos de Banach (se mostrará en un ejercicio de este capítulo que cualesquiera dos de ellos son demostrables a partir del tercero). Convendrá notar que un operador $T : X \to Y$ entre espacios de Banach se dirá que es cerrado si, y solo si, su grafo verifica ser cerrado en el espacio producto $X \times Y$ equipado con la norma $||(x, y)|| = ||x||_X + ||y||_Y$, para cualesquiera $(x, y) \in X \times Y$.

Teorema 0.14 (de la gráfica cerrada) *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal. Si T es cerrado, entonces T es continuo.*

Teorema 0.15 (de los isomorfismos de Banach) *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si T es sobreyectivo, entonces T^{-1} es continuo.*

Capítulo 1

Espacios métricos. Completitud

1. *¿Define $d(x, y) = (x - y)^2$ una métrica sobre el conjunto de los números reales?*

Surge de una observación inmediata que la aplicación anteriormente definida no resulta ser una métrica sobre $\mathbb{R}$ puesto que no satisface la desigualdad triangular. Basta presentar un sencillo contraejemplo, para el cual consideramos $x = 10$, $y = 0$, $z = 1$, de donde:

$$d(x, y) = 10^2 = 100 > d(x, z) + d(z, y) = 9^2 + 1^2 = 82.$$

De este modo se concluye el primero de los ejercicios propuestos.

2. *Demuestra que $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ define una métrica sobre el conjunto de los números reales.*

A efectos de realizar este ejercicio, procederemos a demostrar que se satisfacen los axiomas asociados a la definición de métrica.

i) Iniciemos pues, haciendo notar en primer lugar que:

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|} \geq 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

por propia definición de la aplicación d.

ii) Sean ahora $x, y \in \mathbb{R}$ arbitrarios y observe que:

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x - y|} = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

iii) Nos disponemos ahora a estudiar la simetría de la aplicación en cuestión. Vea que, dados arbitrarios x, y en $\mathbb{R}$, resulta inmediato que

$$d(x, y) = \sqrt{|x - y|} = \sqrt{|y - x|} = d(y, x).$$

iv) Nos resta así estudiar la desigualdad triangular. Con tal objetivo en mente, será preciso considerar $x, y, z \in \mathbb{R}$ arbitrarios. De aquí, hemos de recordar un resultado elemental de Análisis Matemático:

$$\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \ \forall a, b \in \mathbb{R}^+,$$

cuya prueba resulta sencilla y se plantea como ejercicio al lector. Podemos entonces realizar el desarrollo elemental que sigue:

$$d(x,z)+d(z,y)=\sqrt{|x-z|}+\sqrt{|z-y|}\geq\sqrt{|x-z|+|z-y|}\geq\sqrt{|x-y|}=d(x,y),$$

lo que concluye el ejercicio propuesto, quedando así probado que d define una métrica.

3. *Demuestra que la métrica $d(x,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j-\eta_j|$ sobre ℓ_∞ satisface la desigualdad triangular.*

Con objeto de realizar este ejercicio nos serviremos, esencialmente, del bien conocido axioma del supremo. Así, comencemos por considerar pues $x=(\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}, y=(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}, z=(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ elementos arbitrarios de ℓ_∞. Dicho esto, observe que

$$d(x,z)+d(z,y)=\sup_{j\in\mathbb{N}}|\xi_j-\mu_j|+\sup_{j\in\mathbb{N}}|\mu_j-\eta_j|\geq|\xi_j-\mu_j|+|\mu_j-\eta_j|\geq|\xi_j-\eta_j|,$$

para todo $j\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, $d(x,z)+d(z,y)\geq d(x,y)$, tal y como se pretendía demostrar.

4. *Prueba que una métrica alternativa $\tilde{d}$ sobre el espacio $\mathcal{C}([a,b])$ está definida por*

$$\tilde{d}(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt,\qquad \forall x,y\in\mathcal{C}([a,b]).$$

i) Comencemos notando de manera trivial que, si $x,y\in\mathcal{C}([a,b])$ entonces

$$\tilde{d}(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt\geq 0,$$

dado que el integrando es no negativo y, en virtud de las propiedades de la integral.

ii) Sean ahora $x,y\in\mathcal{C}([a,b])$ y observe que

$$\tilde{d}(x,y)=0\Leftrightarrow\int_a^b|x(t)-y(t)|dt=0,$$

lo cual sucederá si, y solamente si $|x(t)-y(t)|=0\Leftrightarrow x(t)=y(t),\forall t\in[a,b]$, debido a conocidas propiedades de conservación del signo de la integral puesto que el integrando se corresponde con una función continua. Veámoslo:

$\Leftarrow$) Razonaremos por contradicción. Resulta inmediato que, si $f\in\mathcal{C}([a,b])$ tal que $f(t)=0$, para todo $t\in[a,b]$, entonces $\int_a^b|f(t)|dt=0$.

$\Rightarrow$) Supongamos, sin perder generalidad, que existe $x_0\in(a,b)$ de modo que $f(x_0)>0$.

Podemos servirnos del lema de conservación del signo para afirmar que existe $\varepsilon>0$ tal que $f(x)>0$, para todo $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

Evidente es que $\left[x_0-\frac{\varepsilon}{2},x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right]\subset(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$. Así, sabemos que $f|_{\left[x_0-\frac{\varepsilon}{2},x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right]}$ alcanza sus extremos absolutos por ser una función continua sobre un compacto. Denotemos, por tanto, x_m el punto correspondiente donde se alcanza el mínimo absoluto y x_M aquel en el cual se alcanza el máximo absoluto. Sea, por su parte, R el rectángulo de vértices $\left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, 0\right), \left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, 0\right), \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_m)\right), \left(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}, f(x_m)\right)$. Resulta evidente entonces la siguiente desigualdad:

$$0 < A(R) \leq \int_a^b |f(t)|dt = 0$$

llegando con ello a una contradicción que prueba el resultado deseado.

iii) Consideremos $x, y \in \mathcal{C}([a,b])$ y hágase notar que:

$$\tilde{d}(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt = \int_a^b |y(t) - x(t)|dt = \tilde{d}(y,x),$$

lo que prueba la propiedad de simetría.

iv) Finalmente, tratemos de demostrar que se satisface la desigualdad triangular. A tal efecto, sean pues $x, y, z \in \mathcal{C}([a,b])$ y véase que

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt &= \int_a^b |(x(t) - z(t)) + (z(t) - y(t))|dt \\ \leq \int_a^b |x(t) - z(t)|dt &+ \int_a^b |z(t) - y(t)|dt = \tilde{d}(x,z) + \tilde{d}(z,y)\end{aligned}$$

Concluimos con ello que es $\tilde{d}$ una distancia sobre el espacio de las funciones continuas en el compacto $[a,b]$.

5. *(Distancia de Hamming) Sea X el conjunto de todas las tripletas ordenadas de ceros y unos. Demuestra que X está formado por ocho elementos y que una métrica d sobre X está definida por $d(x,y) =$ número de sitios donde x e y tienen diferentes entradas.*

Que el espacio denotado X está constituido por ocho elementos, no supone más que un mero ejercicio de combinatoria. Dado que se disponen de 3 plazas, cada una de las cuales consta de dos posibilidades y, evidentemente, las repeticiones están contempladas, estamos pues hablando de variaciones con repetición, lo que significa que el espacio consta de $\mathrm{VR}_2^3 = 2^3 = 8$ elementos.

Mencionado lo anterior, pasemos ahora a demostrar que la aplicación d antes definida resulta, en efecto, una métrica.

i) Observe, por propia definición que $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in X$ pues se trata del número de entradas distintas que contienen ambos puntos. Más aún, es inmediato que $d(x,y) \leq 3, \forall x, y \in X$.

ii) Sean ahora $x, y \in X$ y vea que

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

dado que, si la distancia es cero, todas las entradas coinciden y, por tanto, estamos tratando con el mismo elemento.

iii) La simetría de la aplicación resultará en una prueba trivial ya que, considerados $x, y \in X$ arbitrarios, si $d(x,y) = n \in \{0,1,2,3\}$, esto es, n es el número de entradas distintas que presenta x respecto a y; lógicamente coincide con el número de entradas distintas de y respecto a x, de donde $d(x,y) = d(y,x)$.

iv) Acudamos por último al estudio de la desigualdad triangular. Para ello, sean $x, y, z \in X$ y tratemos de probar que

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

En primer lugar, resulta trivial que, si $x = y = z$, el resultado es inmediato. De la misma forma, si $z = x$ o $z = y$, se obtiene de hecho la igualdad. Notemos pues $z \neq x, z \neq y$ y presentemos, por comodidad en los razonamientos, $d(x,y) = n$ y, por su parte, $d(x,z) + d(z,y) = k$. Dado que $z \neq x, z \neq y$, esto significa que $d(x,z) \geq 1$ y $d(z,y) \geq 1$, de donde se sigue pues que $k \geq 2$. De este modo, en los casos $n = 1, n = 2$, la desigualdad triangular queda garantizada. Nos resta por lo tanto estudiar el caso $n = 3$, pero de aquí solo cabe una posibilidad y es que $x = (0,0,0), y = (1,1,1)$ o viceversa. No obstante, es inmediato que, para cualquier z bajo las condiciones impuestas, $k = 3$, lo que demuestra que la desigualdad triangular se satisface también en este caso, quedando así probado que

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \ \forall x, y, z \in X.$$

De ello, d define una métrica sobre X tal y como se pretendía demostrar.

6. *(Desigualdad triangular) La desigualdad triangular tiene muchas consecuencias útiles. Utilizando*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \tag{1.1}$$

demuestre que

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w).$$

Comencemos en primer lugar haciendo notar que:

$$d(x,y) \overset{(1.1)}{\leq} d(x,z) + d(z,w) + d(y,w),$$

$$d(z,w) \overset{(1.1)}{\leq} d(z,x) + d(x,y) + d(y,w).$$

De ello:

$$d(x,y) - d(z,w) \overset{(1.1)}{\leq} d(x,z) + d(y,w),$$
$$d(z,w) - d(x,y) \overset{(1.1)}{\leq} d(z,x) + d(y,w),$$

lo que prueba precisamente que

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w).$$

tal y como se buscaba.

7. *(Axiomas de una métrica)* $(M1)$ *a* $(M4)$ *podrían ser reemplazados por otros axiomas (sin cambiar la definición). Así, demuestra que* $(M3)$ *y* $(M4)$ *pueden obtenerse de* $(M2)$ *y*

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y).$$

Iniciaremos demostrando que (M3) puede obtenerse a partir de (M2). Tomemos $z = y$, entonces

$$d(x,y) - d(y,x) \leq d(z,x) + d(z,y) - d(y,x) = d(y,x) + d(y,y) - d(y,x) = 0.$$

Por su parte, si escogemos $z = x$ se nota que

$$d(y,x) - d(x,y) \leq d(z,y) + d(z,x) - d(x,y) = d(x,y) + d(x,x) - d(x,y) = 0.$$

Lo que significa en definitiva que:

$$|d(x,y) - d(y,x)| \leq 0 \Rightarrow d(x,y) = d(y,x),\ \forall x, y \in X.$$

De esta forma se prueba (M3). Procedamos ahora a demostrar que (M4) puede obtenerse a través de (M2) y la desigualdad inicial. Sean pues para ello $x, y, z \in X$ y hagamos notar que:

$$d(x,y) \leq d(z,x) + d(z,y).$$

Consideremos pues $w = x$, de donde:

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(z,x) + d(z,y) \leq d(w,z) + d(w,x) + d(z,y) \\ &= d(x,z) + d(x,x) + d(z,y) = d(x,z) + d(z,y), \end{aligned}$$

tal y como buscábamos.

8. *Utilizando que*

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q},\ \forall \alpha, \beta > 0,$$

con p, q *exponentes conjugados, demostrar que la media geométrica de* α *y* β *no excede a la media aritmética.*

Buscamos demostrar en definitiva que $\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$, para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.

Consideraremos pues el caso $p = q = 2$, que resultan ser exponentes conjugados dado que $pq = 4 = p + q$. De ello, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ se nota:

$$\begin{aligned} \alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} &\Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 \\ &\Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

de donde se puede entonces concluir que:

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

9. *(Espacio ℓ_p) Encuentra una sucesión que converja a cero, pero no esté en ningún espacio ℓ_p, donde $1 \leq p < \infty$.*

Consideremos la sucesión $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de término general $\xi_j = \frac{1}{j}$ repetido 3^j veces, esto es:

$$x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}} = \underbrace{1, 1, 1}_{3\,veces}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}}_{9\,veces}, \cdots$$

Se deduce de manera esencialmente trivial que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \to 0$ $(j \to \infty)$. No obstante, veamos que $x \notin \ell_p$, cualquiera que sea $p \geq 1$ finito. Sea pues para ello, precisamente, $p \in [1, \infty)$ cualquiera y vea que:

$$1^p + 1^p + 1^p + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{2^p} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} 3^j \left(\frac{1}{j}\right)^p$$

Observe, en efecto, que la expresión dada describe la suma buscada. Sin embargo, nótese que esta serie no verifica ser convergente dado que no se satisface la condición necesaria, esto es: $\left(\frac{3^j}{j^p}\right)_{j\in\mathbb{N}} \to \infty$ $(j \to \infty)$ para cada $p \geq 1$. De este modo, queda comprobado que $x \notin \ell_p$, cualquiera que sea $1 \leq p < \infty$.

10. *(Diámetro de un conjunto acotado) El diámetro $\delta(A)$ de un conjunto no vacío A en un espacio métrico (X, d) está definido por*

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y).$$

El conjunto A se dice que es acotado si $\delta(A) < \infty$. Demuestra que si $A \subset B$ entonces $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico y consideremos $A, B \subset X$ de forma que $A \subset B$. Ahora, por definición se sabe que:

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y), \qquad \delta(B) = \sup_{x,y\in B} d(x, y).$$

Ya que $A \subset B$, no es necesario más que acudir a la definición de supremo de un conjunto, de donde:

$$\delta(A) = \sup_{x,y\in A} d(x, y) \leq \sup_{x,y\in B} d(x, y) = \delta(B),$$

tal y como se buscaba demostrar.

11. *(Distancia entre dos conjuntos) La distancia $D(A, B)$ entre dos conjuntos no vacíos A, B de un espacio métrico (X, d) está definida por*

$$D(A, B) = \inf_{a\in A,\, b\in B} d(a, b).$$

Muestra que D no define una métrica sobre el conjunto potencia de X.

Para probar que D no define una distancia sobre el conjunto de las partes o conjunto potencia de X, bastará con exponer un contraejemplo para el cual no se satisfaga alguno de los axiomas conocidos de una métrica. Consideremos pues, por ello, $X = (\mathbb{R}^2, d_e)$, donde d_e denota la distancia euclídea y sean:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y, y \geq 0, x \leq 1\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq \frac{1}{2} - y, y \geq 0, x \geq -1\}.$$

Resulta de ello inmediato pues que

$$D(A,B) = \inf_{a \in A,\, b \in B} d_e(a,b) = 0,$$

dado que $A \cap B \neq \emptyset$ (observe que, por ejemplo, $(0,0)$ es un elemento de ambos conjuntos). A pesar de ello, se observa que $A \neq B$, lo que nos permite ya afirmar que, efectivamente, D no define una distancia.

12. *La distancia $D(x,B)$ de un punto x a un subconjunto no vacío B de un espacio métrico (X,d) está definida por*

$$D(x,B) = \inf_{b \in B} d(x,b),$$

de acuerdo con el problema anterior. Demuestra que para cualesquiera $x, y \in X$:

$$|D(x,B) - D(y,B)| \leq d(x,y).$$

Procedamos a demostrar el resultado en cuestión. A tal efecto sean pues $x, y \in X$ y hagamos notar que

$$D(x,B) = \inf_{b \in B} d(x,b) \leq \inf_{b \in B} (d(y,b) + d(x,y)) = D(y,B) + d(x,y),$$

$$D(y,B) = \inf_{b \in B} d(y,b) \leq \inf_{b \in B} (d(x,b) + d(x,y)) = D(x,B) + d(x,y).$$

De este modo se obtiene pues que

$$D(x,B) \leq D(y,B) + d(x,y) \Rightarrow D(x,B) - D(y,B) \leq d(x,y),$$

$$D(y,B) \leq D(x,B) + d(x,y) \Rightarrow D(y,B) - D(x,B) \leq d(x,y).$$

Lo que demuestra con todo ello que

$$|D(x,B) - D(y,B)| \leq d(x,y).$$

13. *Demuestra que la unión de dos conjuntos acotados A y B en un espacio métrico, es un conjunto acotado.*

Sean pues $A, B \subset X$ dos subconjuntos acotados del espacio métrico $X = (X, d)$. Puesto que ambos verifican la condición de acotación, entonces existen constantes $M_A, M_B > 0$ de tal modo que $d(a, 0) < M_A$, para todo $a \in A$ y, de la misma forma, $d(b, 0) < M_B$, para todo $b \in B$.

Ahora bien, consideremos pues $M := \max\{M_A, M_B\}$ y procedamos a demostrar que $A \cup B$ es igualmente acotado.

Sea así $x \in A \cup B$, entonces es claro que $x \in A$ o bien, $x \in B$. Si sucede que $x \in A$, entonces dado que A es acotado se tendría que $d(x, 0) < M_A \leq M$. Por otro lado, y de forma completamente análoga, si ocurre que $x \in B$, entonces se sigue de inmediato que $d(x, 0) < M_B \leq M$. Esto nos permite entonces garantizar que cualquier punto de $A \cup B$ dista del origen una cantidad finita, de modo que $\delta(A \cup B) < \infty$, demostrando así que la unión de conjuntos acotados sobre un espacio métrico, es también acotado.

14. *El producto cartesiano $X = X_1 \times X_2$ de dos espacios métricos (X_1, d_1) y (X_2, d_2) puede convertirse también en un espacio métrico. Demuestra que es una métrica $\tilde{d}$, la aplicación dada por*

$$\tilde{d}(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}.$$

Al igual que en los anteriores ejercicios, nosotros optaremos por demostrar que se satisfacen los axiomas clásicos asociados a una métrica.

i) Observemos de manera esencialmente inmediata que $\tilde{d}(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ puesto que se corresponde con la raíz cuadrada de una suma de cantidades no negativas.

ii) Sean ahora pues $x, y \in X$ y hagamos notar que

$$\tilde{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} = 0 \Leftrightarrow d_1(x_1, y_1) = 0 \wedge d_2(x_2, y_2) = 0.$$

Ahora bien, dado que d_1 y d_2 verifican ser métricas sobre los correspondientes espacios métricos X_1 y X_2, respectivamente, entonces esto ocurrirá si, y solamente si, $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$, es decir, si, y solo si, $x = y$.

iii) Consideremos ahora $x, y \in X$ y probemos que se satisface la propiedad de simetría. Vea que, por ser d_1, d_2 métricas, entonces satisfacen esta propiedad, de tal modo que:

$$\tilde{d}(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2} = \sqrt{d_1(y_1, x_1)^2 + d_2(y_2, x_2)^2} = \tilde{d}(y, x).$$

iv) Finalmente deberemos probar que se satisface la desigualdad triangular. Este será, probablemente, el más laborioso de los axiomas a probar. Sean entonces $x, y, z \in X$ y note que

$$d_1(x_1, y_1)^2 \leq (d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1))^2 = d_1(x_1, z_1)^2 + d_1(z_1, y_1)^2 + 2d_1(x_1, z_1)d_1(z_1, y_1),$$

$$d_2(x_2, y_2)^2 \leq (d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2))^2 = d_2(x_2, z_2)^2 + d_2(z_2, y_2)^2 + 2d_2(x_2, z_2)d_2(z_2, y_2).$$

Con ello:

$$\begin{aligned}\tilde{d}(x, y)^2 &= d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2 \\ &\leq d_1(x_1, z_1)^2 + d_1(z_1, y_1)^2 + d_2(x_2, z_2)^2 + d_2(z_2, y_2)^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2(d_1(x_1,z_1)d_1(z_1,y_1) + d_2(x_2,z_2)d_2(z_2,y_2)) \\
&= \tilde{d}(x,z)^2 + \tilde{d}(y,z)^2 + 2\sum_{i=1}^{2} d_i(x_i,z_i)d_i(z_i,y_i).
\end{aligned}
$$

Podemos hacer uso entonces de la desigualdad de Hölder para el caso $p = q = 2$, de donde se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{d}(x,z)^2 + \tilde{d}(y,z)^2 + 2\sum_{i=1}^{2} d_i(x_i,z_i)d_i(z_i,y_i) \\
&\leq \tilde{d}(x,z)^2 + \tilde{d}(y,z)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{2} d_i(x_i,z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{2} d_i(z_i,y_i)^2} \\
&= \tilde{d}(x,z)^2 + \tilde{d}(y,z)^2 + 2\tilde{d}(x,z)\tilde{d}(z,y) \\
&= (\tilde{d}(x,z) + \tilde{d}(z,y))^2.
\end{aligned}
$$

En definitiva, volviendo sobre nuestros pasos podemos apreciar que

$$\tilde{d}(x,y)^2 \leq (\tilde{d}(x,z) + \tilde{d}(z,y))^2,$$

lo que demuestra que también es satisfecha la desigualdad triangular, luego $\tilde{d}$ define una métrica sobre X.

15. *Describa geométrica y analíticamente la bola $B(x_0,1)$ en $\mathbb{R}$. Abarque la misma cuestión sobre el cuerpo de los números complejos, $\mathbb{C}$, y sobre el espacio $\mathcal{C}([a,b])$.*

Nótese que aplicando la definición de una bola sobre $\mathbb{R}$, se obtiene

$$B(x_0,1) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,x_0) < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < 1\} = (x_0 - 1, x_0 + 1).$$

Por su parte, realizando el tratamiento sobre $\mathbb{C}$ se nota que

$$B(x_0,1) = \{x \in \mathbb{C} : d(x,x_0) < 1\} = \{x \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(x - x_0)^2 + \operatorname{Im}(x - x_0)^2 < 1\},$$

que no es otra cosa sino el disco complejo centrado en x_0 y de radio 1, $D(x_0,1)$.

Por último, trabajando bajo el espacio $\mathcal{C}([a,b])$ con la distancia dada por

$$d(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|,$$

se tendrá pues que

$$B(x_0,1) = \{x \in \mathcal{C}([a,b]) : d(x,x_0) < 1\} = \left\{x \in \mathcal{C}([a,b]) : \max_{t\in[a,b]} |x(t) - x_0(t)| < 1\right\},$$

esto es, se trata de una banda constituida por todas aquellas funciones cuya distancia a $x_0 \in \mathcal{C}([a,b])$ sea menor que 1.

16. *Demuestra que cualquier conjunto no vacío A de un espacio métrico (X, d) es abierto si, y solo si, es unión de bolas abiertas.*

$\Leftarrow$) Supongamos en primer lugar que $A = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i)$ donde I denota el conjunto de índices, pongamos, $\mathbb{N}$. Probar que A es un conjunto abierto resultará en una prueba elemental.

Sea $x \in A$, entonces existe $j \in I$ de modo que $x \in B(x_j, r_j)$. Dado que $B(x_j, r_j)$ es abierta, es entorno de todos sus puntos, de donde, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$B(x, \delta_x) \subset B(x_j, r_j) \subset \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i) = A$$

Así se demuestra que A verifica ser abierto.

$\Rightarrow$) Pasemos ahora a probar que A es unión de bolas abiertas bajo las condiciones impuestas. Sea pues para ello $x \in A$, dado que A es abierto no vacío, entonces existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \overset{(1)}{\subset} A$. Ahora bien, resulta evidente que $A \subset \bigcup_{x\in A} B(x, \varepsilon_x)$. Nos resta demostrar la inclusión recíproca. Para ello, tomemos pues $y \in \bigcup_{x\in A} B(x, \varepsilon_x)$, entonces se tiene que existe ε_y tal que $y \in B(y, \varepsilon_y) \subset A$ según (1). De aquí se obtiene la inclusión buscada y, por tanto

$$A = \bigcup_{x\in A} B(x, \varepsilon_x).$$

17. *Si x es un punto de acumulación de un subconjunto A de un espacio métrico (X, d), demuestra que cualquier entorno de x contiene infinitos puntos de A.*

Nos limitaremos a trabajar con los elementos de la base de entornos de $x \in X$, esto es:

$$\mathcal{B}_x = \{B(x, r) : r \in \mathbb{R}^+\},$$

pues como sabemos, si $\mathcal{U}$ es un entorno arbitrario de $x \in X$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset \mathcal{U}$.

Ahora bien, sea $x \in A'$, esto es, en la acumulación de A, entonces por definición:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ tenemos que } B(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset,$$

es decir, existe al menos $y \neq x$ en X de manera que $y \in B(x, \varepsilon) \cap A$.

Supongamos, llegados a este punto, que existe un número finito, digamos n, de elementos de A en $B(x, \varepsilon)$, $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Para concluir el ejercicio, acudamos, por ejemplo, al carácter secuencial de la acumulación, que nos proporcionará un desarrollo directo y elegante:

$$x \in A' \Leftrightarrow \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(A - \{x\}) : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x.$$

No obstante, dado que $B(x, \varepsilon)$ contiene un número finito de elementos de A distintos de x, no podremos hallar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verificando lo pedido. Contradicción.

Así, $B(x, \varepsilon)$ contiene un número infinito de puntos de A. Basta notar la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, lo que prueba el resultado.

18. *Muestra que la clausura $\overline{B(x_0, r)}$ de una bola abierta $B(x_0, r)$ en un espacio métrico puede diferir de la bola cerrada $\overline{B}(x_0, r)$.*

Plantearemos el clásico contraejemplo que muestra esto. Para ello, tomaremos $X = \mathbb{R}^2$ dotado de la métrica discreta que, como recordamos, está dada por

$$d(x, y) = 0, x = y, \qquad d(x, y) = 1, x \neq y.$$

Dicho esto, consideremos pues $B(x_0, 1)$ con $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Nótese que

$$\overline{B}(x_0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x_0) \leq 1\} = \mathbb{R}^2.$$

Mientras que, por otro lado

$$\overline{B(x_0, 1)} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, x_0) < 1\}} = \overline{\{x_0\}} = \{x_0\}.$$

De esta forma, $\overline{B(x_0, 1)} \subsetneq \overline{B}(x_0, 1)$.

19. *Un punto x no perteneciente a un conjunto cerrado $M \subset (X, d)$ siempre tiene una distancia distinta de cero a M. Para probar esto, demuestra que $x \in \overline{A}$ si, y solo si, $D(x, A) = 0$; aquí A es un subconjunto no vacío de X.*

$\Rightarrow$) Comencemos anotando que, si $x \in A \subset \overline{A}$, entonces $D(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$. Supongamos pues que $x \in \overline{A} - A$ y tratemos de demostrar que $D(x, A) = 0$. Sabemos que $x \in A'$ y, de ello, por definición:

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, x_0 \in A - \{x\} : d(x, x_0) < \varepsilon.$$

Note así que

$$D(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, x_0) < \varepsilon.$$

Basta entonces hacer tender $\varepsilon \to 0$, de donde $D(x, A) = 0$.

$\Leftarrow$) Para probar la implicación contraria, supongamos ahora que $D(x, A) = 0$. Entonces por definición:

$$D(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0.$$

Ahora recuerde que $x \in \overline{A}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset,$$

esto es, si

$$\forall \varepsilon > 0, \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\} \cap A \neq \emptyset.$$

Por hipótesis, dado que $D(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0$, esto significa que existe $x_0 \in A$ de tal forma que $d(x, x_0) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, lo que indica precisamente que $x \in \overline{A}$.

20. *(El espacio $B([a,b])$) El espacio de todas las funciones reales de variable real acotadas en el compacto $[a,b]$ se denota usualmente por $B([a,b])$. Demuestra que $B([a,b])$, $a < b$, no es separable.*

Comencemos por recordar que la métrica definida sobre $B([a,b])$ está dada por

$$d(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|, \ \forall x, y \in B[a,b].$$

Ahora, para demostrar que este espacio no es separable, acudiremos a un útil resultado de topología general: dado un espacio topológico X, si existe una familia infinita no numerable de abiertos no vacíos y disjuntos entonces X no es separable.

Realicemos un detenido razonamiento del ejercicio a presentar, que quizás pueda resultar complicado en un inicio. Para ello, conviene recordar la archiconocida delta de Kronecker, que está dada como sigue

$$\delta_i(t) = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq t \\ 1 & si \quad i = t \end{cases}$$

Ahora bien, notemos que, dados $i, j \in [a,b]$ con $i \neq j$ entonces se tiene que

$$d(\delta_i, \delta_j) = \sup_{t\in[a,b]} |\delta_i(t) - \delta_j(t)| = 1,$$

puesto que hemos considerado i, j elementos distintos. Luego entonces, podemos tomar $r > 0$ lo suficientemente pequeño, pongamos $r = 1/2$, tal que $B(\delta_i, 1/2) \cap B(\delta_j, 1/2) = \emptyset$. De esta forma, tenemos pues una cantidad infinita no numerable de bolas disjuntas. Con ello, queda suficientemente justificado que la familia que vamos a considerar es:

$$\mathcal{F} = \{B(\delta_i, 1/2) : i \in [a,b]\}.$$

Es claro que $\mathcal{F}$ se corresponde con una familia infinita no numerable (basta notar el conjunto de índices) de abiertos, pues los elementos de la familia no son más que bolas abiertas; no vacíos y disjuntos según lo probado anteriormente. Con ello, en virtud del resultado mencionado al comienzo del ejercicio, queda demostrado, en efecto, que el espacio $B([a,b])$, $a < b$ no es separable, como se quería demostrar.

21. *Demuestra que una aplicación $T : X \to Y$ es continua si, y solamente si, la imagen inversa de cualquier conjunto cerrado $M \subset Y$ es un cerrado en X.*

$\Rightarrow$) Comencemos suponiendo que T es continua. Sea pues $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $T^{-1}(M)$ con $(\xi_n) \to \xi$ $(n \to \infty)$. Nuestro objetivo es probar que $\xi \in T^{-1}(M)$. Resulta sencillo notar que $(T(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de M de tal forma que $(T(\xi_n)) \to T(\xi)$ $(n \to \infty)$ en virtud a la continuidad de T. Dado que M verifica ser cerrado, entonces $T(\xi) \in M$ y, con ello, $\xi \in T^{-1}(M)$.

$\Leftarrow$) Ahora supongamos que para cada conjunto cerrado $M \subset Y$, entonces $T^{-1}(M) \subset X$ es cerrado igualmente. En este caso nuestro objetivo reside en probar que T verifica ser continua, o lo que es lo mismo, que para toda sucesión $x = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $(\xi_n) \to \xi$ $(n \to \infty)$, se tiene que $(T(\xi_n)) \to T(\xi)$ $(n \to \infty)$. Sea $M = \overline{(T(\xi_n))}$. Es claro que M verifica ser un conjunto cerrado. De ello, $T^{-1}(M)$ es también cerrado. Ahora, si $T(\xi) \neq \lim_{n\to\infty} T(\xi_n)$ entonces $T(\xi) \notin M$, de donde $\xi \notin T^{-1}(M)$. Sin embargo, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $T^{-1}(M)$, que es cerrado, de donde $\xi \in M$. Contradicción. Por lo tanto, $(T(\xi_n)) \to T(\xi)$, quedando probada la continuidad de T.

22. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, digamos, $(x_{\sigma(n)}) \to x$, demuestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con límite x.*

En primer lugar, dado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces por definición:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m_1 \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N}, p, q > m_1 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado, sea $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente de modo que la subsucesión $(x_\sigma(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$. Entonces:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m_2 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > m_2 \Rightarrow d(x_{\sigma(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora demostremos que $(x_n) \to x$. Sea pues para ello $\varepsilon > 0$ y tomemos $m := \max\{m_1, m_2\}$. Así, si $n > m$, una aplicación de la desigualdad triangular nos proporciona:

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{\sigma(n)}) + d(x_{\sigma(n)}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que demuestra, en efecto, que $(x_n) \to x$.

23. *(Acotación) Prueba que toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Sea para ello pues $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Entonces de la definición se sigue:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N}, p, q > m \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Con ello tenemos "controlados" todos los términos a partir de uno determinado. Deberemos además estudiar los m primeros términos de la sucesión. A tal efecto, consideremos $\gamma = \max_{i,j=1,\ldots,m} d(x_i, x_j)$. Entonces bastará pues considerar $M := \max\{\varepsilon, \gamma\}$, de donde

$$\begin{aligned} d(x_n, 0) &\leq d(0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) + d(x_{m+1}, x_n) \\ &\leq d(0, x_1) + (m-1)\gamma + \varepsilon \leq d(0, x_1) + mM < \infty. \end{aligned}$$

Se prueba de este modo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

24. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en un espacio métrico (X, d), demuestra que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $a_n = d(x_n, y_n)$, es convergente.*

Dado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy, entonces se tiene que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m_1 \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N}, p, q > m_1 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m_2 \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N}, p, q > m_2 \Rightarrow d(y_p, y_q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora bien, recuerde que $a_n = d(x_n, y_n)$, es decir, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se corresponde con una sucesión sobre $\mathbb{R}$. Con ello, bastará demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy debido a la completitud de $\mathbb{R}$. Vea que

$$\begin{aligned} a_p &= d(x_p, y_p) \leq d(x_p, x_q) + d(x_q, y_q) + d(y_q, y_p) \\ &= d(x_p, x_q) + a_q + d(y_q, y_p) \\ &\Rightarrow a_p - a_q \leq d(x_p, x_q) + d(y_q, y_p). \end{aligned}$$

Mientras que, por su parte

$$\begin{aligned} a_q &= d(x_q, y_q) \leq d(x_p, x_q) + d(x_p, y_p) + d(y_q, y_p) \\ &= d(x_p, x_q) + a_p + d(y_q, y_p) \\ &\Rightarrow a_q - a_p \leq d(x_p, x_q) + d(y_q, y_p). \end{aligned}$$

De este modo, deducimos que $|a_p - a_q| \leq d(x_p, x_q) + d(y_q, y_p)$. Observemos entonces que, considerando el natural $m := \max\{m_1, m_2\}$, se tiene:

$$d(a_p, a_q) = |a_p - a_q| \leq d(x_p, x_q) + d(y_q, y_p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall p, q > m,$$

lo que prueba que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por ende, convergente.

25. *Si d_1 y d_2 son métricas sobre el mismo espacio vectorial X y existen dos reales positivos a, b tales que para todo $x, y \in X$:*

$$a \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b \cdot d_1(x, y),$$

demuestra que las sucesiones de Cauchy en (X, d_1) y en (X, d_2) son las mismas.

En primer lugar, sea pues $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy sobre el espacio métrco (X, d_1). Entonces

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N}, p, q > m \Rightarrow d_1(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{b}.$$

Ahora, usando la segunda parte de la cadena de desigualdades inicial se nota que

$$d_2(x_p, x_q) \leq b \cdot d_1(x_p, x_q) < b\frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon,$$

para todo $p, q > m$. Luego entonces, hemos demostrado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy sobre (X, d_2).

Sea ahora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el métrico (X, d_2). Por definición

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N}, p, q > m \Rightarrow d_2(x_p, x_q) < a\varepsilon.$$

Así, bastará hacer uso de la primera parte de la desigualdad dada para obtener, con ello,

$$a \cdot d_1(x_p, x_q) \leq d_2(x_p, x_q) \Rightarrow d_1(x_p, x_q) \leq \frac{1}{a} d_2(x_p, x_q) < \frac{1}{a} a\varepsilon = \varepsilon,$$

para todo $p, q > m$. Ello prueba pues que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica ser una sucesión de Cauchy sobre (X, d_1).

26. *Utilizando que $\mathbb{R}$ es completo, demuestra que $\mathbb{C}$ es un espacio métrico completo equipado con la distancia usual.*

Comencemos por recordar que la métrica definida sobre $\mathbb{C}$ está dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{\text{Re}(x - y)^2 + \text{Im}(x - y)^2}, \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

Ahora bien, sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{C}$. Entonces

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N}, p, q > m \Rightarrow d(z_p, z_q) < \varepsilon.$$

Por su parte, tomemos las sucesiones componentes $(\text{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\text{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que verifican ser dos sucesiones de Cauchy sobre $\mathbb{R}$ dado que, de la definición de distancia, para cualesquiera $p, q > m$ naturales,

$$\text{Re}(z_p - z_q)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |\text{Re}(z_p) - \text{Re}(z_q)| < \varepsilon,$$

$$\text{Im}(z_p - z_q)^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow |\text{Im}(z_p) - \text{Im}(z_q)| < \varepsilon.$$

Así, puesto que $\mathbb{R}$ verifica ser un espacio métrico completo, entonces ambas sucesiones son convergentes, con $(\text{Re}(z_n)) \xrightarrow{n\to\infty} Re(z)$ y, de la misma forma, $(\text{Im}(z_n)) \xrightarrow{n\to\infty} \text{Im}(z)$. De este modo, optaremos por considerar el elemento $w = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$. Deberemos demostrar que $w \in \mathbb{C}$ y que $(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} w$. Es trivial, en primer lugar, que $w \in \mathbb{C}$. Vamos a demostrar, por último, que se satisface la convergencia de la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a tal elemento:

$$\begin{aligned} d(z_n, w) &= \sqrt{\text{Re}(z_n - w)^2 + \text{Im}(z_n - w)^2} \\ &= \sqrt{(\text{Re}(z_n) - \text{Re}(w))^2 + (\text{Im}(z_n) - \text{Im}(w))^2} \\ &= \sqrt{(\text{Re}(z_n) - \text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z_n) - \text{Im}(z))^2} \\ &< \varepsilon\sqrt{2}, \end{aligned}$$

lo que demuestra, en definitiva, que $(z_n) \xrightarrow{n\to\infty} w$. Dada la arbitrariedad de la sucesión de Cauchy inicial $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se demuestra que $\mathbb{C}$ es completo.

27. *Sea X el espacio de todas las n-tuplas ordenadas $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de números reales y*

$$d(x, y) = \max_{j=1,\dots,n} |\xi_j - \eta_j|,$$

donde $y = (\eta_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$. Demuestra que (X, d) es completo.

Comencemos considerando pues $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, k \in \mathbb{N} : p, q > k \Rightarrow d(x_p, x_q) = \max_{j=1,\dots,n} |\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}| < \varepsilon.$$

Note que m marca la n-tupla en la que nos encontramos y j el término de dicha n-tupla. Ahora, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ fijo se tiene pues que, si $p, q > k$, entonces

$$|\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Esto significa que la sucesión de números reales $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ es de Cauchy. De ahí, dada la completitud de $\mathbb{R}$, esta sucesión verifica ser convergente, pongamos, $(\xi_j^{(m)}) \xrightarrow{m\to\infty} \xi_j$.

De esta forma, parece sensato considerar el elemento $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ como límite para la sucesión $(\xi_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Deberemos entonces demostrar que $\xi \in X$ y que $(x_m) \xrightarrow{m\to\infty} \xi$. Es claro, en primer lugar, que $\xi \in X$ dado que se corresponde con una n-tupla ordenada de números reales. Pasemos a verificar por último que $(x_m) \to \xi$. De la expresión (1.2), haciendo $q \to \infty$, seguimos

$$|\xi_j^{(p)} - \xi_j| \le \varepsilon, \qquad \forall p > m.$$

Además, dado que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ tenemos que $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ converge a ξ_j, entonces se nota que

$$d(x_m, \xi) = \max_{j=1,\dots,n} \left|\xi_j^{(m)} - \xi_j\right| < \varepsilon,$$

lo que demuestra que $(x_m) \xrightarrow{m\to\infty} \xi$ y, con ello, (X, d) es un espacio métrico completo.

28. *Sea $M \subset \ell_\infty$ el subespacio formado por todas las sucesiones $x = (\xi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ con un número finito de términos distintos de cero. Demostrar que M no es completo.*

Para la realización de este ejercicio, será aconsejable recordar que $M \subset \ell_\infty$ es completo si, y solo si, es cerrado en ℓ_∞ (pues este es completo como ya sabemos), lo que resultará cierto si, y solamente si, el límite de toda sucesión convergente de elementos de M, es también un elemento de M.

En definitiva, nuestro objetivo será tomar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M, hallar el límite y demostrar que este no pertenece a M. Sea así pues $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $M \subset \ell_\infty$ la sucesión de término general

$$\xi_j^{(n)} = \begin{cases} 0 & si \quad j > n, \\ \dfrac{1}{e^j} & si \quad j \le n. \end{cases}$$

Que, para cada $n \in \mathbb{N}$, x_n es un elemento de M resulta trivial dado que presenta un número finito de términos no nulos. Demostrar que la sucesión es de Cauchy también resultará sencillo. Sea, para ello, $\varepsilon > 0$ y tomemos $m \in \mathbb{N}$ con $m + 1 > \ln(1/\varepsilon)$. Así, si $p, q \in \mathbb{N}, p > q > m$:

$$d(x_p, x_q) = \sup_{j \in \mathbb{N}} |\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}| \overset{(\mathrm{p} \geq \mathrm{q})}{=} \frac{1}{e^{q+1}} < \frac{1}{e^{m+1}} < \varepsilon.$$

De hecho, resulta de un razonamiento trivial que $(x_n) \to (1/e^n) \notin M$, pues esta sucesión presenta una cantidad infinita de términos distintos de cero.

De este modo, hemos hallado una sucesión de Cauchy de elementos de M y tal que su límite no resulta un elemento de M, luego entonces se tiene que M no verifica ser cerrado en ℓ_∞. Por lo dicho, ya que (ℓ_∞, d) es un espacio métrico completo, entonces M no verifica ser completo, tal y como se quería demostrar.

29. *Demuestra que el conjunto de todos los números reales es un espacio métrico incompleto si tomamos*

$$d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

Para demostrar que $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico incompleto, bastará pues encontrar una sucesión de Cauchy que no sea convergente.

Como bien sabemos $(\arctan(n)) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{2}$. Ello nos motiva pues a considerar la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $\mathbb{R}$. En vista de la convergencia de la sucesión de arcotangentes

$$\left|\arctan(n) - \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

para $n \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande. Realizada esta apreciación, pasemos pues a demostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea pues $\varepsilon > 0$, entonces por lo mencionado existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m$, es $|\arctan(n) - \pi/2| < \varepsilon/2$. Así, si $p, q \in \mathbb{N}, p, q > m$ entonces:

$$d(x_p, x_q) = |\arctan(p) - \arctan(q)| \leq \left|\arctan(p) - \frac{\pi}{2}\right| + \left|\frac{\pi}{2} - \arctan(q)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que prueba que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Supongamos ahora que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces existirá $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, m \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > m \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

esto es, $d(x_n, x) = |\arctan(n) - \arctan(x)| < \varepsilon$ para todo $n > m$. Pero por lo comentado al inicio del ejercicio, ha de suceder que $\arctan(x) = \pi/2$. Sin embargo, como bien sabemos de la asignatura Análisis Matemático, $\arctan(x) < \pi/2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que prueba que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es una sucesión convergente. Así, $(\mathbb{R}, d)$ no es completo.

30. *(Espacio $\mathcal{C}([a, b])$) Demuestra que el subespacio $Y \subset \mathcal{C}([a, b])$ formado por todas las funciones $x \in \mathcal{C}([a, b])$ tales que $x(a) = x(b)$ es completo.*

Como sabemos $(\mathcal{C}([a,b]),d)$ es un espacio métrico completo con la distancia dada por

$$d(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|, \qquad \forall x,y\in\mathcal{C}([a,b]).$$

De este modo, demostrar que $Y\subset\mathcal{C}([a,b])$ es completo se reducirá a demostrar que verifica ser cerrado en $\mathcal{C}([a,b])$. Para ello, sea pues $x\in\overline{Y}$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $(x_n)\xrightarrow{n\to\infty}x$ en $\mathcal{C}([a,b])$. Esto es,

$$\forall\varepsilon>0,\exists m\in\mathbb{N}:n\in\mathbb{N},n>m\Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon,$$

o lo que es lo mismo, $\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$, para todo $n>m$. Así, para cada $t\in[a,b]$ se nota pues que

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon, \qquad \forall n>m,$$

lo que significa, precisamente, que $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente a $x(t)$ en $[a,b]$. Así, dado que se corresponde con una sucesión de funciones continuas en $[a,b]$ que converge uniformemente, entonces el límite $x(t)$ es una función continua en tal compacto. Para demostrar que $x\in Y$ nos restará notar si $x(a)=x(b)$. Podemos observar de manera sencilla que

$$\begin{aligned}|x(a)-x(b)|&=|x(a)-x_n(a)+x_n(a)-x_n(b)+x_n(b)-x(b)|\\&\leq|x(a)-x_n(a)|+\underbrace{|x_n(a)-x_n(b)|}_{0}+|x_n(b)-x(b)|\\&=|x(a)-x_n(a)|+|x_n(b)-x(b)|\\&\leq 2\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|=2d(x_n,x).\end{aligned}$$

Tomando límites cuando $n\to\infty$, dado que $(x_n)\to x$ entonces podemos garantizar que

$$|x(a)-x(b)|\leq 2d(x_n,x)\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Por lo tanto, $x(a)=x(b)$ y, con ello, $x\in Y$. Así pues, Y es cerrado y, por el resultado inicialmente mencionado, (Y,d) es completo.

31. *Demuestra que el espacio métrico discreto es completo.*

Sea pues (X,d) el espacio equipado con la métrica dada por

$$d(x,y)=0,x=y, \qquad d(x,y)=1,x\neq y.$$

Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (X,d), esto es

$$\forall\varepsilon>0,\exists\, m\in\mathbb{N}:p,q\in\mathbb{N},p,q>m\Rightarrow d(x_p,x_q)<\varepsilon.$$

Ahora, si $x_p\neq x_q$, entonces $d(x_p,x_q)=1$, luego no se satisface la definición para $\varepsilon\in(0,1)$. Por tanto, ha de ocurrir necesariamente que $x_p=x_q$ para todo $p,q>m$. Esto significa que las únicas sucesiones de Cauchy en este espacio métrico son aquellas constantes (salvo, a lo sumo, un número finito de términos). Pero resulta inmediato que tales sucesiones son igualmente convergentes, lo que nos permite ya afirmar que (X,d) es un espacio métrico completo.

32. *En el espacio secuencial $\mathcal{S}(A)$ tenemos que una sucesión $(x_n) \to x$ si, y solo si, $(\xi_j^{(n)}) \to \xi_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, donde $x_n = (\xi_j^{(n)})$ y $x = (\xi_j)$. Demuestra que $\mathcal{S}$ es completo equipado con la métrica*

$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j - \eta_j|}{1 + |\xi_j - \eta_j|}, \qquad \forall x, y \in \mathcal{S},$$

siendo $x = (\xi_j), y = (\eta_j)$.

Para demostrar que $\mathcal{S}$ es completo, sea pues $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{S}, d)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q > m$ entonces

$$d(x_p, x_q) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}|}{1 + |\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}|} < \varepsilon.$$

En particular, para cada $j \in \mathbb{N}$ fijo, se tendrá que

$$\frac{1}{2^j} \frac{|\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}|}{1 + |\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}|} < \varepsilon, \qquad \forall p, q > m.$$

La anterior desigualdad puede ser reescrita en los siguientes términos:

$$|\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}| < 2^j \varepsilon (1 + |\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}|),$$

o bien,

$$(1 - 2^j \varepsilon)|\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}| < 2^j \varepsilon,$$

para todo $p, q > m$. Ahora bien, si elegimos $\varepsilon < 1/2^j$, entonces $1 - 2^j \varepsilon > 0$ y, se sigue que

$$|\xi_j^{(p)} - \xi_j^{(q)}| < \frac{2^j \varepsilon}{1 - 2^j \varepsilon} = \frac{1}{1 - 2^j \varepsilon} - 1, \qquad \forall p, q > m.$$

Junto a la afirmación anterior, resulta sencillo notar que $(1/(1 - 2^j \varepsilon) - 1) \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0$. Esto nos lleva entonces a garantizar que la sucesión $(\xi_j^{(1)}, \xi_j^{(2)}, \dots)$ es de Cauchy y, además, de números reales. Por lo tanto, dado que $\mathbb{R}$ verifica ser completo, entonces tal sucesión será convergente, $(\xi_j^{(n)}) \xrightarrow{n \to \infty} \xi_j$, para cada $j \in \mathbb{N}$.

De este modo, podemos servirnos del resultado dado en el enunciado para afirmar que, si $x := (\xi_j)$, entonces $(x_n) \to x$. De ello, dada la arbitrariedad de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, queda demostrado que $\mathcal{S}$ es completo.

33. *Demuestra que la sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sobre $(\mathcal{C}([0,1]), d)$, donde*

$$d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt, \qquad \forall x, y \in \mathcal{C}([0,1]);$$

dada por

$$x_n(t) = \begin{cases} n & t \in \left[0, \dfrac{1}{n^2}\right], \\ \dfrac{1}{\sqrt{t}} & t \in \left[\dfrac{1}{n^2}, 1\right], \end{cases}$$

no es convergente.

Supongamos por contradicción que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. Entonces existirá $x \in \mathcal{C}([0,1])$ de modo que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > m \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Esto es

$$d(x_n, x) = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n^2}} |n - x(t)|dt + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \left|\frac{1}{\sqrt{t}} - x(t)\right| dt < \varepsilon.$$

De este modo, si tomamos límite cuando $n \to \infty$, se nota que:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{n^2}} |n - x(t)|dt + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \left|\frac{1}{\sqrt{t}} - x(t)\right| dt \right) = \int_0^1 |\frac{1}{\sqrt{t}} - x(t)|dt = 0.$$

Pero según lo probado en el ejercicio 4. habría de suceder que $x(t) = 1/\sqrt{t}$ para todo $t \in (0,1]$. No obstante observe, evidentemente, que la función $x \notin \mathcal{C}([0,1])$ dado que ni tan siquiera resulta estar definida para $t = 0$, lo que supone una contradicción. Queda así demostrado que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente.

34. *¿Cuál es la completación de (X, d), donde X es el conjunto de todos los números racionales y $d(x, y) = |x - y|$ para todo $x, y \in X$?*

Se presenta el espacio métrico $(\mathbb{Q}, d)$, esto es, el cuerpo de los números racionales dotado de la distancia euclídea. Para analizar la completación del espacio métrico en cuestión, acudiremos al teorema de completación, es decir, buscaremos un espacio métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{d})$ de forma que presente un subconjunto W isométrico a $\mathbb{Q}$ y tal que $\overline{W} = \tilde{X}$.

Nuestro candidato natural resultará el espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$, es decir, $\mathbb{R}$ equipado con la métrica usual. Si denotamos $W = \mathbb{Q}$, surge de manera elemental que la aplicación identidad actúa como isometría de $\mathbb{Q}$ en W. Además, que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, es conocido de análisis matemático, pues para cualquier $x \in \mathbb{R}$, podemos hallar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{Q}$ de modo que $(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} x$, lo que significa que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

Todo ello demuestra, en efecto, que $(\mathbb{R}, d)$ es la completación del espacio métrico inicialmente dado $(\mathbb{Q}, d)$.

35. *Si X_1 y X_2 son isométricos y X_1 es completo, demuestre que X_2 también es completo.*

Comencemos recordando que, si X_1 y X_2, con métricas asociadas d, $\tilde{d}$, respectivamente, son isométricos entonces existe una aplicación biyectiva $T : X_1 \to X_2$ tal que

$$d(x, y) = \tilde{d}(T(x), T(y)), \qquad \forall x, y \in X_1.$$

Mencionado esto, pasemos a demostrar que X_2 es completo. Sea pues para ello $(x_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X_2. Entonces

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m \in \mathbb{N} : p, q > m \Rightarrow \tilde{d}(x_p^{(2)}, x_q^{(2)}) < \varepsilon.$$

No obstante, dado que T es biyectiva, tales elementos $x_p^{(2)}, x_q^{(2)}$ son imagen por esta aplicación de algún elemento en X_1, esto es, existirán $x_r^{(1)}, x_s^{(1)} \in X_1$, con $r, s \in \mathbb{N}$, elementos de una sucesión $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ de tal forma que $T(x_r^{(1)}) = x_p^{(2)}, T(x_s^{(1)}) = x_q^{(2)}$, de donde la definición anterior, reescrita, será

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : r, s > m \Rightarrow \tilde{d}(T(x_r^{(1)}), T(x_s^{(1)})) < \varepsilon.$$

Pero por ser T una isometría, preserva distancias, de donde

$$\tilde{d}(T(x_r^{(1)}), T(x_s^{(1)})) = d(x_r^{(1)}, x_s^{(1)}) < \varepsilon, \qquad \forall r, s > m.$$

Esto significa que $(x_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ verifica ser una sucesión de Cauchy en X_1 y, por ser este espacio completo, resulta ser convergente, luego existe $x \in X_1$ tal que $x = \text{lím}_n x_n^{(1)}$. Por definición, esto indica que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow d(x_n^{(1)}, x) < \varepsilon.$$

Aplicando nuevamente la condición de que T es una isometría se obtiene pues que

$$d(x_n^{(1)}, x) = d(T(x_n^{(1)}), T(x)) = d(x_n^{(2)}, T(x)) < \varepsilon, \qquad \forall n > n_0.$$

Ello demuestra que $(x_n^{(2)}) \xrightarrow{n\to\infty} T(x) \in X_2$ y, por tanto, dada la arbitrariedad de $(x_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$, se sigue que X_2 es completo, como buscábamos.

36. *Demuestra que* $\mathcal{C}([0,1])$ *y* $\mathcal{C}([a,b])$ *son isométricos.*

Con objeto de demostrar que los espacios de funciones mencionados son isométricos, deberemos hallar una aplicación $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([a,b])$ de modo que sea biyectiva y preserve distancias, esto es

$$d(x, y) = \tilde{d}(T(x), T(y)), \forall x, y \in \mathcal{C}([0,1]),$$

donde d y $\tilde{d}$ son las distancias asociadas a $\mathcal{C}([0,1])$ y $\mathcal{C}([a,b])$, respectivamente. A tal efecto, parece sensato considerar $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([a,b])$ dada por

$$T(x(t)) = x(a + t(b-a)), \qquad \forall x \in \mathcal{C}([0,1]).$$

Demostrar que esta aplicación está bien definida resulta sencillo. Para ello, basta recordar el homeomorfismo elemental $t \mapsto a + t(b-a)$, visto en topología general, y que establece una biyección continua entre los cerrados $[0,1]$ y $[a,b]$. Precisamente, por este mismo motivo, la biyectividad queda garantizada en la aplicación T, y nuestro mayor esfuerzo residirá en la prueba de que, efectivamente, T preserva distancias.

Con tal objetivo en mente, sean $x, y \in \mathcal{C}([0,1])$. Entonces

$$d(T(x), T(y)) = \max_{t\in[0,1]} |T(x(t)) - T(y(t))| = \max_{t\in[0,1]} |x(a + t(b-a)) - y(a + t(b-a))|.$$

Sea ahora pues $s = a + t(b - a)$, entonces se sigue de ello que:

$$\max_{t \in [0,1]} |x(a + t(b - a)) - y(a + t(b - a))| = \max_{s \in [a,b]} |x(s) - y(s)| = \tilde{d}(x, y).$$

De aquí, $d(T(x), T(y)) = \tilde{d}(x, y)$, para todo $x, y \in \mathcal{C}([0, 1])$. Esto prueba que T es una isometría sobreyectiva y, por lo tanto, los espacios de funciones en cuestión verifican ser isométricos.

37. *Si* $(X, \tilde{d})$ *es completo, demostrar que* (X, d) *también lo es, donde note* $\tilde{d} = \frac{d}{1+d}$.

Sea pues, con objeto de probar que (X, d) es completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (X, d). Entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, m \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N}, p, q > m \Rightarrow d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Observe de ello que

$$\tilde{d}(x_p, x_q) = \frac{d(x_p, x_q)}{1 + d(x_p, x_q)} < \frac{\varepsilon/2}{1 + d(x_p, x_q)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall p, q > m,$$

lo que significa que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \tilde{d})$. Dado que este espacio verifica ser completo, entonces existe $x \in X$ tal que $x = \lim_n x_n$ respecto a la métrica $\tilde{d}$. Así

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, m_1 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > m_1 \Rightarrow \tilde{d}(x_n, x) < \varepsilon.$$

Asumiendo $\varepsilon \in (0, 1)$, podemos notar que

$$\tilde{d}(x_n, x) = \frac{d(x_n, x)}{1 + d(x_n, x)} \Rightarrow d(x_n, x) = \frac{\tilde{d}(x_n, x)}{1 - \tilde{d}(x_n, x)}, \qquad \forall n > m_1.$$

Vea que esta expresión tiene cabida debido al ε considerado, pues $1 - \tilde{d}(x_n, x) > 1 - \varepsilon$ es un elemento de $(0, 1)$, para todo $n > m_1$. Así pues, basta considerar $m_2 := \max\{m, m_1\}$, de donde

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq d(x_n, x_s) + d(x_s, x) \\ &= d(x_n, x_s) + \frac{\tilde{d}(x_s, x)}{1 - \tilde{d}(x_s, x)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = \frac{3\varepsilon - \varepsilon^2}{2(1 - \varepsilon)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{3 - \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} 0, \end{aligned}$$

para todo $n, s > m_2$, lo que demuestra que, efectivamente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en (X, d). Por ello, dada la arbitrariedad de la sucesión de Cauchy inicialmente tomada, se prueba que (X, d) es completo.

38. *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *son sucesiones convergentes en un espacio métrico* (X, d) *y tienen el mismo límite* l*, demuestra que* $\lim_n d(x_n, x'_n) = 0$.

Por propia definición de convergencia se tiene que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m_1 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > m_1 \Rightarrow d(x_n, l) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m_2 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > m_2 \Rightarrow d(x'_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, una sencilla aplicación de la desigualdad triangular nos proporciona que, si $n \in \mathbb{N}$, con $n > \max\{m_1, m_2\}$

$$d(x_n, x'_n) \leq d(x_n, l) + d(l, x'_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ello prueba que, efectivamente, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$.

39. *Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy en* (X, d) *y* $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es otra sucesión sobre el mismo espacio métrico tal que se satisface que* $\lim_n d(x_n, x'_n) = 0$*, prueba que* $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy.*

Dado que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy entonces se verifica que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m_1 \in \mathbb{N} : p, q \in \mathbb{N}, p, q > m_1 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ahora, vea que la condición $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$, equivale a expresar que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\, m_2 \in \mathbb{N} : n \in \mathbb{N}, n > m_2 \Rightarrow d(x_n, x'_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Con todo ello, acudiendo a la desigualdad triangular, si $p, q > m := \max\{m_1, m_2\}$

$$d(x'_p, x'_q) \leq d(x'_p, x_p) + d(x_p, x_q) + d(x_q, x'_q) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

De esta forma se demuestra que la sucesión $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, tal y como buscábamos.

40. *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo. Supongamos que* $G_n \subset X$ *es un subconjunto denso y abierto para* $n \in \mathbb{N}$*. Demuestra que* $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ *es no vacío. Encuentra un espacio métrico no completo para el cual esto no sea cierto.*

De hecho, podemos decir más: $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ *es denso en* X*. Demuestra esto haciendo uso del resultado que garantiza que un subespacio cerrado de un espacio métrico completo es completo.*

Recuerde que la densidad de un subconjunto de un espacio métrico puede caracterizarse a través de la bolas, esto es, G_n será denso si contiene un punto en cada bola que podamos definir sobre el métrico X. Así, si G_n es abierto y denso, entonces su complementario $F_n = X - G_n$ es cerrado y no contiene completamente a ninguna bola. Por el teorema de categoría de Baire se sigue entonces que $\cup_{n=1}^{\infty} F_n \neq X$, lo que nos proporciona que $\cap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

Para demostrar que $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso, necesitaremos probara que este tiene un punto en cada bola que podamos definir. A tal efecto, consideremos, para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, la bola cerrada $F = \overline{B}(x, \varepsilon)$, que puede ser vista como un espacio métrico completo por si misma equipada con la métrica inducida por X. Los conjuntos $O_n = F \cap G_n$ son abiertos y densos en F. Así, usando la primera parte del ejercicio, que acabamos de demostrar, se sigue que $\cap_{n=1}^{\infty} O_n \neq \emptyset$, esto es, $F \cap \cap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \emptyset$. En otras palabras, $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ tiene un punto en la bola $F = \overline{B}(x, \varepsilon)$, lo que garantiza, dada su arbitrariedad, que $\cap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X.

Finalmente, para un espacio métrico donde esto no es cierto, consideremos el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ equipado con la métrica $d(x, y) = |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$, y tomemos $G_n = X - F_n = \mathbb{Q} - \{q_n\}$.