PRÓLOGO

El manual "Métodos matemáticos para la valoración de empresas y proyectos de inversión. Ejercicios resueltos con EXCEL" es un complemento práctico del libro "Métodos matemáticos para la valoración de empresas y proyectos de inversión", publicado en el año 2020 por Salvador Cruz Rambaud y Ana María Sánchez Pérez, con el nº 62 de la colección Textos Docentes de la EDUAL (Editorial Universidad de Almería). En efecto, el presente manual es una colección de cuestiones teóricas, ejercicios prácticos y casos, cuya resolución proporcionará al estudiante una visión integral de los métodos cuantitativos más usuales utilizados en la valoración de empresas y proyectos de inversión.

Al igual que el manual anteriormente referenciado, esta obra va destinada a los alumnos de la asignatura "Matemáticas para la valoración de empresas" del Máster en Contabilidad y Finanzas Corporativas (COFIC) por la Universidad de Almería y la Universidad Politécnica de Cartagena. En este sentido, nos gustaría expresar nuestro agradecimiento a la Sección de Innovación Docente del Vicerrectorado de Ordenación Académica de la Universidad de Almería ya que esta obra se diseñó con la ayuda económica y en el marco del Grupo Docente para la Creación de Materiales Didácticos, correspondiente al bienio 2021-2022, titulado "Creación de material docente para la asignatura 'Matemáticas para la Valoración de Empresas' del Máster en Contabilidad y Finanzas Corporativas (COFIC)".

Las cuestiones, ejercicios y casos que se presentan en esta obra tienen una orientación tanto teórica como práctica, ya que los supuestos van destinados a los alumnos del itinerario profesional y del perfil investigador del mencionado máster COFIC. Además, esta obra pretende ser un manual equilibrado en el sentido de que sea de utilidad para aquellos alumnos que no proceden de las ramas de la Economía y la Empresa, y que además sea de interés para complementar las competencias de estos últimos al presentar productos financieros relativamente recientes.

De esta forma, el manual que se desarrolla a continuación presenta una batería de ejercicios completamente resueltos, donde se comparte el desarrollo tradicional de cualquier supuesto financiero con su resolución mediante la hoja de cálculo EXCEL, herramienta informática ampliamente extendida entre los alumnos de las universidades españolas.

Esperamos que esta obra cubra las expectativas que nos hemos marcado y que sea de utilidad para los estudiantes del Máster, tanto en lo que se refiere a la superación de la asignatura como para su preparación posterior en cuestiones financieras.

LOS AUTORES.

TEMA 1: Introducción a los métodos de valoración

1. Concepto de función de capitalización / descuento

Ejercicio 1.1. Demostrar que, si *F* es una función dinámica de capitalización, se verifica la siguiente desigualdad: $F(t,a) \geq 1$. Por tanto, la imagen de *F* estaría contenida en el intervalo [1,+∞[, tal y como se afirma en la Definición 1 del manual de teoría de la asignatura (Métodos matemáticos para la valoración de empresas y proyectos de inversión).

Resolución: Por la definición de función dinámica de capitalización, sabemos que $F(t,0) = 1$. Adicionalmente, para todo $a \geq 0$, como F es estrictamente creciente con respecto de *a*, se tiene que $F(t,a) \geq F(t,0) = 1$. Por consiguiente, podemos concluir que

$$F(t,a) \geq 1.$$

Ejercicio 1.2. Demostrar que $F(t,a) = \exp\{(t+a)^k - t^k\}$, con $k > 0$, es una función dinámica de capitalización.

Resolución: Para ello, tenemos que comprobar que se cumplen las dos condiciones que definen a una función dinámica de capitalización:

- $F(t,0) = 1$. En efecto, en este caso, $F(t,0) = \exp\{(t+0)^k - t^k\} = \exp\{0\} = 1$.
- $F(t,a)$ es creciente con respecto de *a*. En efecto, en este caso,

$$\frac{\partial F(t,a)}{\partial a} = k(t+a)^{k-1} \exp\{(t+a)^k - t^k\} > 0.$$

Ejercicio 1.3. Demostrar que, si *F* es una función dinámica de descuento, se verifica la siguiente desigualdad: $0 < F(t,a) \leq 1$. Por tanto, la imagen de *F* estaría contenida en el intervalo]0,1], tal y como se afirma en la Definición 2 del manual de teoría de la asignatura (Métodos matemáticos para la valoración de empresas y proyectos de inversión).

Resolución: Por la definición de función dinámica de descuento, sabemos que $F(t,0) = 1$. Adicionalmente, para todo $a \geq 0$, como F es estrictamente decreciente con respecto de *a*, se tiene que $F(t,a) \leq F(t,0) = 1$. Por consiguiente, podemos concluir que

$$F(t,a) \leq 1.$$

Por último, cualquier función, ya sea de capitalización o de descuento, tiene que ser siempre positiva, por lo que

$$0 < F(t,a) \leq 1.$$

Ejercicio 1.4. Demostrar que $F(t,a) = \dfrac{1}{1+i[(t+a)^k - t^k]}$, con $i > 0$ y $k > 0$, es una función dinámica de descuento.

Resolución: Para ello, tenemos que comprobar que se cumplen las dos condiciones que definen a una función dinámica de descuento:

- $F(t,0) = 1$. En efecto, en este caso, $F(t,0) = \dfrac{1}{1+i[(t+0)^k - t^k]} = \dfrac{1}{1+i \cdot 0} = 1$.
- $F(t,a)$ es decreciente con respecto de *a*. En efecto, en este caso,

$$\frac{\partial F(t,a)}{\partial a} = -\frac{i \cdot k(t+a)^{k-1}}{1+i[(t+a)^k - t^k]} < 0.$$

Ejercicio 1.5. Demostrar que $F(a) = (1+i)^a$, con $i > 0$, es una función estacionaria de capitalización.

Resolución: Para ello, tenemos que comprobar que se cumplen las dos condiciones que definen a una función estacionaria de capitalización:

- $F(0) = 1$. En efecto, en este caso, $F(0) = (1+i)^0 = 1$.
- $F(a)$ es creciente con respecto de *a*. En efecto, en este caso,

$$\frac{\partial F(a)}{\partial a} = (1+i)^a \ln(1+i) > 0,$$

ya que, al ser $1+i > 1$, implica que $\ln(1+i) > 0$.

Ejercicio 1.6. Demostrar que $F(a) = 1 - da$, con $d > 0$, es una función estacionaria de descuento.

Resolución: Para ello, tenemos que comprobar que se cumplen las siguientes dos condiciones:

- $F(0) = 1$. En efecto, en este caso, $F(0) = 1 - d \cdot 0 = 1$.

- $F(a)$ es decreciente con respecto de a. En efecto, en este caso,

$$\frac{\partial F(a)}{\partial a} = -d < 0\,.$$

2. Rentas

Ejercicio 2.1. Obtener la expresión del valor final de una renta unitaria, temporal y prepagable, utilizando la metodología de las ecuaciones en diferencias finitas.

El valor final de una renta unitaria, temporal y prepagable, de n términos y valorada al tanto i, se simboliza por $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, cuya representación gráfica es:

1	1	1	1	…	1	$\ddot{s}_{\overline{n}|i}$
0	1	2	3	…	$n-1$	n

verifica la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$f(n+1) - f(n) = (1+i)^{n+1}\,,$$

donde hemos hecho $f(n) := \ddot{s}_{\overline{n}|i}$. De este modo, la diferencia entre las expresiones de $\ddot{s}_{\overline{n+1}|i}$ y $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ (ambas calculas en el mismo instante final) es igual al valor del primer capital de la renta de n + 1 términos, capitalizado durante $n+1$ períodos, siendo la condición inicial, es decir, el valor de la renta con 0 términos:

$$f(0) = 0\,.$$

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$f_h(n) = A\,,$$

siendo A una constante, mientras que una solución particular de la ecuación completa es de la forma:

$$f_c(n) = B(1+i)^{n+1},$$

siendo también B una constante. Para determinar B, se sustituye $f_c(n)$ en la ecuación en diferencias finitas, obteniéndose:

$$B(1+i)^{n+2} - B(1+i)^{n+1} = (1+i)^{n+1}.$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por $(1+i)^{-n-1}$ y sacando factor común, nos quedaría:

$$B(1+i-1) = 1,$$

de donde:

$$B = \frac{1}{i}.$$

Por tanto,

$$f(n) = f_h(n) + f_c(n) = A + \frac{(1+i)^{n+1}}{i}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, se tiene que:

$$A + \frac{1+i}{i} = 0,$$

de donde:

$$A = -\frac{1+i}{i}.$$

En definitiva,

$$\ddot{s}_{\overline{n|}i} = -\frac{1+i}{i} + \frac{(1+i)^{n+1}}{i} = \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i} = (1+i)\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Ejercicio 2.2. Representar gráficamente una renta constante, pospagable, anticipada *k* períodos y obtener su valor final con la metodología utilizada en el Tema 1 del manual de teoría de la asignatura (Métodos matemáticos para la valoración de empresas y proyectos de inversión).

El valor final de una renta constante de cuantía *C*, temporal y pospagable, de *n* términos y valorada al tanto *i*, anticipada *k* períodos, se simboliza por $k/(V_s)_{\overline{n|}i}$, cuya representación gráfica es:

	C	C	C	…	C	…	$k/(V_s)_{\overline{n}\rvert i}$
0	1	2	3	…	n	…	$n+k$

verifica la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$f(n+1) - f(n) = C(1+i)^{n+k},$$

donde hemos hecho $f(n) := k/(V_s)_{\overline{n}\rvert i}$. De este modo, la diferencia entre las expresiones de $k/(V_s)_{\overline{n+1}\rvert i}$ y $k/(V_s)_{\overline{n}\rvert i}$ (ambas calculas en el mismo instante final) es igual al valor del primer capital de la renta de n + 1 términos, capitalizado durante $n+k$ períodos, siendo la condición inicial, es decir, el valor de la renta con 0 términos:

$$f(0) = 0.$$

La solución general de la ecuación homogénea es:

$$f_h(n) = A,$$

siendo A una constante, mientras que una solución particular de la ecuación completa es de la forma:

$$f_c(n) = B(1+i)^{n+k},$$

siendo también B una constante. Para determinar B, se sustituye $f_c(n)$ en la ecuación en diferencias finitas, obteniéndose:

$$B(1+i)^{n+k+1} - B(1+i)^{n+k} = C(1+i)^{n+k}.$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por $(1+i)^{-n-k}$ y sacando factor común, nos quedaría:

$$B(1+i-1) = C,$$

de donde:

$$B = \frac{C}{i}.$$

Por tanto,

$$f(n) = f_h(n) + f_c(n) = A + \frac{C(1+i)^{n+k}}{i}.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, se tiene que:

$$A + \frac{C(1+i)^k}{i} = 0,$$

de donde:

$$A = -\frac{C(1+i)^k}{i}.$$

En definitiva,

$$k/(V_s)_{\overline{n|}i} = -\frac{C(1+i)^k}{i} + \frac{C(1+i)^{n+k}}{i} = \frac{C(1+i)^{n+k} - C(1+i)^k}{i} = C(1+i)^k \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

3. Operaciones de amortización

3.1. Sistema de cuotas de amortización variables en progresión aritmética

Ejercicio 1. Un banco ha concedido un préstamo de 80.000 euros a amortizar en 10 años mediante el sistema de cuotas de amortización variables en progresión aritmética, aplicando un tipo de interés constante del 4% anual. Se pide:

a) Construir el cuadro de amortización, aplicando las fórmulas generales de amortización de préstamos, considerando que el prestatario ha elegido 5.000 euros como primera cuota de amortización.
b) Construir el cuadro de amortización, aplicando las expresiones específicas de amortización analizadas en este tema, considerando que el prestatario ha elegido un incremento lineal del 10% en las cuotas de amortización.
c) ¿Qué ventaja tiene este método de amortización con respecto al de términos amortizativos variables en progresión aritmética?

Resolución:

a) **Construir el cuadro de amortización, aplicando las fórmulas generales de amortización de préstamos, considerando que el prestatario ha elegido 5.000 euros como primera cuota de amortización.**

En este caso, se cumplimentaría la celda C3 (ver la tabla al final de este apartado), correspondiente a la primera cuota de amortización, con la cuantía de 5.000,00 euros. A continuación, se elegiría una celda cualquiera, no incluida en el cuadro de amortización, que recogería el valor *d* de la diferencia de la progresión (por ejemplo, A20). Por tanto, la celda C4 se generaría escribiendo "=C3+A$20" y ejecutándola posteriormente. El resto de cuotas de amortización se generaría mediante la extensión de la celda C4 a las celdas C5, C6, …, C12. Ahora bien, teniendo en cuenta que, en un principio, la celda A20 (vacía) contiene el valor 0, la suma de todas las cuotas de amortización no daría 80.000,00 sino 50.000,00 euros, como podría observarse en la celda C13.

Así, con objeto de que la celda A20 contenga el valor adecuado de la diferencia, procederemos del siguiente modo:

- Accedemos a "Datos" > "Análisis" > "Buscar objetivo".
- Cumplimentamos: Definir celda: C13, con el valor: 80.000,00, para cambiar la celda: A20.
- Al aceptar, la celda A20 recoge el valor 666,67 que es la diferencia de la progresión.

A continuación, el resto de las celdas se generaría mediante el procedimiento general:

- Primera cuota de interés (B3): "=E2*4%". Extender.
- Primer término amortizativo (D3): "=B3+C3". Extender.
- Primer capital vivo (E2): "=C13". Segundo capital vivo (E3): "=E2−C3". Extender.
- Primer capital amortizado (F2): "=0". Segundo capital amortizado (F3): "=F2+C3". Extender.

El resultado de este proceso nos arrojaría el siguiente resultado:

Período	Cuota de interés	Cuota de amortización	Término amortizativo	Capital vivo	Capital amortizado
0	-	-	-	80.000,00	0,00
1	3.200,00	5.000,00	8.200,00	75.000,00	5.000,00
2	3.000,00	5.666,67	8.666,67	69.333,33	10.666,67
3	2.773,33	6.333,33	9.106,67	63.000,00	17.000,00
4	2.520,00	7.000,00	9.520,00	56.000,00	24.000,00
5	2.240,00	7.666,67	9.906,67	48.333,33	31.666,67
6	1.933,33	8.333,33	10.266,67	40.000,00	40.000,00
7	1.600,00	9.000,00	10.600,00	31.000,00	49.000,00
8	1.240,00	9.666,67	10.906,67	21.333,33	58.666,67
9	853,33	10.333,33	11.186,67	11.000,00	69.000,00
10	440,00	11.000,00	11.440,00	0,00	80.000,00
		80.000,00			

b) Construir el cuadro de amortización, aplicando las expresiones específicas de amortización analizadas en este tema, considerando que el prestatario ha elegido un incremento lineal del 10% en las cuotas de amortización.

En este caso, la celda C3 (ver la tabla al final de este apartado) recogería el valor *A* de la primera cuota de amortización. Por tanto, la celda C4 se generaría escribiendo “=C3+10%*C$3” y ejecutándola posteriormente. El resto de cuotas de amortización se generaría mediante la extensión de la celda C4 a las celdas C5, C6, …, C12. Ahora bien, teniendo en cuenta que, en un principio, la celda C3 (vacía) contiene el valor 0, la suma de todas las cuotas de amortización no daría 80.000,00 sino 0,00 euros, como podría observarse en la celda C13.

Así, con objeto de que la celda C3 contenga el valor adecuado de la primera cuota de amortización, procederemos del siguiente modo:

- Accedemos a “Datos” > “Análisis” > “Buscar objetivo”.
- Cumplimentamos: Definir celda: C13, con el valor: 80.000,00, para cambiar la celda: C3.
- Al aceptar, la celda C3 recogería el valor 5.019,63 que es el primer término de la progresión.

A continuación, el resto de las celdas se generaría de la siguiente forma:

- Primera cuota de interés (B3): “=–10%*C$3*4%/2*A3^2+(–C$3*4%+3*10%*C$3*4%/2)*A3+(E$2*4%+C$3*4%–10%*C$3*4%)”. Extender.

- Primer término amortizativo (D3): "="=-10%*C$3*4%/2*A3^2+(10%*C$3-C$3*4%+3*10%*C$3*4%/2)*A3+(E$2*4%+C$3*4%-10%*C$3*4%+C$3-10%*C$3)". Extender.
- Primer capital vivo (E2): "=E$2−A3*C$3-A3(A3−1)/2*10%*C$3". Extender.
- Primer capital amortizado (F2): "=A3*C$3+A3(A3−1)/2*10%*C$3". Segundo capital amortizado (F3): "=F2+D3". Extender.

El resultado de este proceso nos arrojaría el siguiente resultado:

Período	Cuota de interés	Cuota de amortización	Término amortizativo	Capital vivo	Capital amortizado
0	-	-	-	80.000,00	0,00
1	3.200,00	5.019,63	8.219,63	74.980,37	5.019,63
2	2.999,21	5.521,59	8.520,81	69.458,77	10.541,23
3	2.778,35	6.073,75	8.852,11	63.385,02	16.614,98
4	2.535,40	6.681,13	9.216,53	56.703,89	23.296,11
5	2.268,16	7.349,24	9.617,40	49.354,65	30.645,35
6	1.974,19	8.084,17	10.058,35	41.270,48	38.729,52
7	1.650,82	8.892,58	10.543,40	32.377,90	47.622,10
8	1.295,12	9.781,84	11.076,96	22.596,05	57.403,95
9	903,84	10.760,03	11.663,87	11.836,03	68.163,97
10	473,44	11.836,03	12.309,47	0,00	80.000,00
		80.000,00			

c) ¿Qué ventaja tiene este método de amortización con respecto al de términos amortizativos variables en progresión aritmética?

La ventaja que tiene este sistema de amortización es que, ante una variación de los tipos de interés vigentes, las cuotas de amortización permanecen invariables y solamente afectaría a las cuotas de interés, con lo que los términos amortizativos también se recalcularían inmediatamente.

3.2. Amortización de préstamos con una tasa de interés del 0% y comisiones iniciales

Ejercicio 2. Un préstamo promete un tipo de interés nominal (TIN) del 0% pero aplica una comisión de apertura sobre el principal del préstamo. Si el préstamo se amortiza mediante el método de cuotas de amortización constantes, se pide:

a) Determinar la expresión general de la TAE de la operación.
b) Discutir el resultado obtenido en el apartado a).
c) Hallar la TAE de la operación para diferentes valores de la comisión de apertura y de la duración. Representar gráficamente los resultados obtenidos.
d) ¿Dependería el valor de la TAE del método empleado para la amortización del principal?

Resolución:

a) Determinar la expresión general de la TAE de la operación.

Para la resolución de este apartado, vamos a utilizar las siguientes variables:

- C_0: Principal del préstamo.
- n: Duración del préstamo.
- i_a: Comisión de apertura del préstamo.
- i^*: TAE de la operación.

En este caso, las cuotas de amortización constantes (coincidentes con los términos amortizativos) del préstamo son:

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A = \frac{C_0}{n}.$$

Por tanto, el esquema temporal de la operación, desde el punto de vista de la entidad financiera (que coincidiría con el punto de vista del prestatario pues la comisión de apertura es una característica comercial bilateral), sería el siguiente:

Entrega:	C_0				
Recibe:	$C_0 i_a$	A	A	…	A
	0	1	2	…	n

La ecuación de equivalencia financiera en el origen quedaría del siguiente modo:

$$C_0 = C_0 i_a + \frac{C_0}{n} a_{\overline{n|}i^*},$$

de donde, simplificando C_0 y realizando operaciones algebraicas elementales, obtenemos:

$$(1-i_a)n = \frac{1-(1+i^*)^{-n}}{i^*}.$$

b) Discutir el resultado obtenido en el apartado a).

Si la comisión de apertura aumenta, el primer miembro de la ecuación disminuye y, por tanto, el valor actual del segundo miembro. Como el valor actual de una renta temporal, unitaria y pospagable es decreciente con respecto al tipo de interés, podemos deducir que, en este caso, la TAE aumentaría. Por tanto, de una manera esquemática, podemos afirmar que:

$$i_a \uparrow \Rightarrow i^* \uparrow.$$

Por otra parte, si la duración de la operación aumenta de n a $n+1$, el primer miembro de la ecuación aumenta de $(1-i_a)n$ a $(1-i_a)(n+1)$, es decir, se incrementa en:

$$(1-i_a)(n+1)-(1-i_a)n = 1-i_a.$$

Adicionalmente, el valor actual del segundo miembro se incrementa en:

$$\frac{1-(1+i^*)^{-(n+1)}}{i^*} - \frac{1-(1+i^*)^{-n}}{i^*} = \frac{(1+i^*)^{-(n+1)}-(1+i^*)^{-n}}{i^*} = (1+i^*)^{-n}\frac{(1+i^*)-1}{i^*} = (1+i^*)^{-n}.$$

Para comparar cuál de los dos incrementos es mayor, hacemos el siguiente razonamiento:

$$1-i_a = \frac{1-(1+i^*)^{-n}}{i^* n} > \frac{(1+i^*)^{-n} n}{n} = (1+i^*)^{-n}.$$

Por tanto, para compensar el menor crecimiento en el segundo miembro de la ecuación, tendremos que disminuir el tipo de interés en dicho miembro, por lo que la TAE de la operación disminuiría. Por tanto, de una manera esquemática, podemos afirmar que:

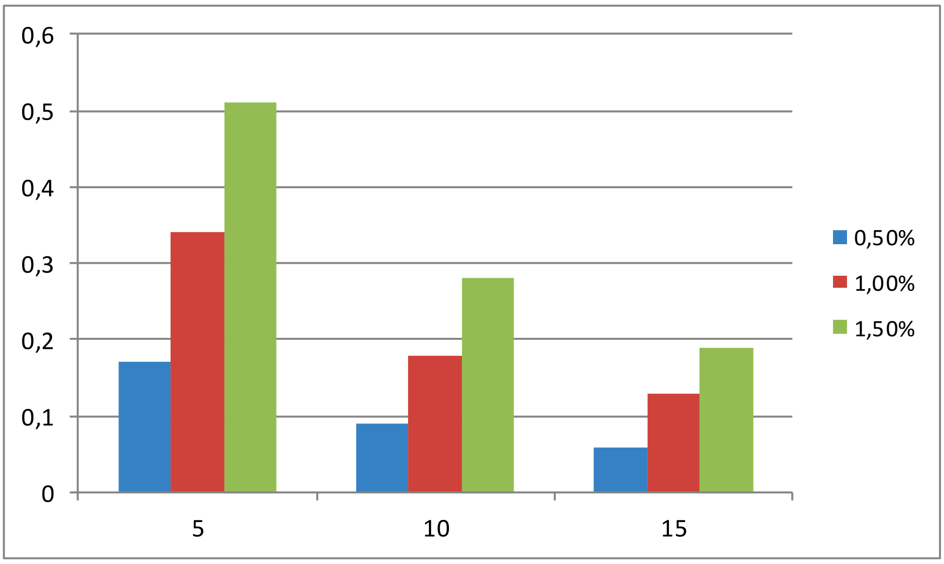
$$n \uparrow \Rightarrow i^* \downarrow.$$

c) Hallar la TAE de la operación para diferentes valores de la comisión de apertura y de la duración. Representar gráficamente los resultados obtenidos.

Utilizando la hoja de cálculo EXCEL, accedemos a “Datos” > “Análisis” > “Buscar objetivo”, para obtener los resultados de la siguiente tabla:

i_a \ n	**5**	**10**	**15**
0,50%	0,17%	0,09%	0,06%
1,00%	0,34%	0,18%	0,13%
1,50%	0,51%	0,28%	0,19%

A continuación, vamos a representar gráficamente los resultados obtenidos en la tabla anterior, que corroboran el razonamiento presentado en el apartado b).



d) ¿Dependería el valor de la TAE del método empleado para la amortización del principal?

Sí dependería porque, evidentemente, el resultado de la TAE sería distinto si las cuotas de amortización del préstamo fuesen variables, en particular, si variaran en progresión aritmética o en progresión geométrica. Cualquier ejemplo serviría para comprobar esta afirmación.

3.3. Amortización de préstamos con descuento lineal

Ejercicio 3. Un préstamo calcula siempre los intereses y aplica una comisión de apertura sobre el principal total de dicho préstamo. Si el préstamo se amortiza aplicando la función de descuento lineal y el método de cuotas de amortización constantes, se pide:

a) Determinar la expresión general de la TAE de la operación.
b) Discutir el resultado obtenido en el apartado a).
c) Hallar la TAE de la operación para diferentes valores de la comisión de apertura y de la duración, para un tanto de descuento del 5%. Representar gráficamente los resultados obtenidos.
d) ¿Dependería el valor de la TAE del método empleado para la amortización del principal?

Resolución:

a) Determinar la expresión general de la TAE de la operación.

Para la resolución de este apartado, vamos a utilizar las siguientes variables:

- C_0: Principal del préstamo.
- n: Duración del préstamo.
- i_a: Comisión de apertura del préstamo.
- d: tanto de descuento en descuento lineal.
- i^*: TAE de la operación.

En este caso, las cuotas de amortización constantes del préstamo son:

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A = \frac{C_0}{n},$$

mientras que los términos amortizativos, también constantes, serían:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a = \frac{C_0}{n} + C_0 d = \left(\frac{1}{n} + d\right) C_0 .$$

Por tanto, el esquema temporal de la operación, desde el punto de vista de la entidad financiera (que coincidiría con el punto de vista del prestatario pues la comisión de apertura es una característica comercial bilateral), sería el siguiente:

Entrega:	C_0				
Recibe:	$C_0 i_a$	a	a	…	a
	0	1	2	…	n

La ecuación de equivalencia financiera en el origen quedaría de la siguiente forma:

$$C_0 = C_0 i_a + \left(\frac{1}{n} + d\right) C_0 a_{\overline{n}|i^*},$$

de donde, simplificando C_0 y realizando operaciones algebraicas elementales, obtenemos:

$$\frac{1 - i_a}{1 + nd} n = \frac{1 - (1 + i^*)^{-n}}{i^*}.$$

b) Discutir el resultado obtenido en el apartado a).

Si la comisión de apertura aumenta, el primer miembro de la ecuación disminuye y, por tanto, el valor actual del segundo miembro. Como el valor actual de una renta temporal, unitaria y pospagable es decreciente con respecto al tipo de interés, podemos deducir que, en este caso, la TAE aumentaría. Por tanto, de una manera esquemática, podemos afirmar que:

$$i_a \uparrow \Rightarrow i^* \uparrow.$$

Por otra parte, si la duración de la operación aumenta de n a $n+1$, el primer miembro de la ecuación aumenta de $\frac{1 - i_a}{1 + nd} n$ a $\frac{1 - i_a}{1 + (n+1)d}(n+1)$, es decir, se incrementa en:

$$\frac{1 - i_a}{1 + (n+1)d}(n+1) - \frac{1 - i_a}{1 + nd} n = \frac{1 - i_a}{[1 + (n+1)d](1 + nd)}.$$

Adicionalmente, el valor actual del segundo miembro se incrementa en:

$$\frac{1 - (1 + i^*)^{-(n+1)}}{i^*} - \frac{1 - (1 + i^*)^{-n}}{i^*} = \frac{(1 + i^*)^{-(n+1)} - (1 + i^*)^{-n}}{i^*} = (1 + i^*)^{-n} \frac{(1 + i^*) - 1}{i^*} = (1 + i^*)^{-n}.$$

Para comparar cuál de los dos incrementos es mayor, hacemos el siguiente razonamiento:

$$\frac{1 - i_a}{[1 + (n+1)d](1 + nd)} = \frac{1 - (1 + i^*)^{-n}}{i^* n[1 + (n+1)d]} > \frac{(1 + i^*)^{-n} n}{n[1 + (n+1)d]} = \frac{(1 + i^*)^{-n}}{1 + (n+1)d} < (1 + i^*)^{-n}.$$

Por tanto, no puede afirmarse que el primer miembro de la expresión anterior sea mayor que $(1 + i^*)^{-n}$, por lo que, de una manera esquemática, podemos afirmar que:

$$n \uparrow \Rightarrow i^* ?$$

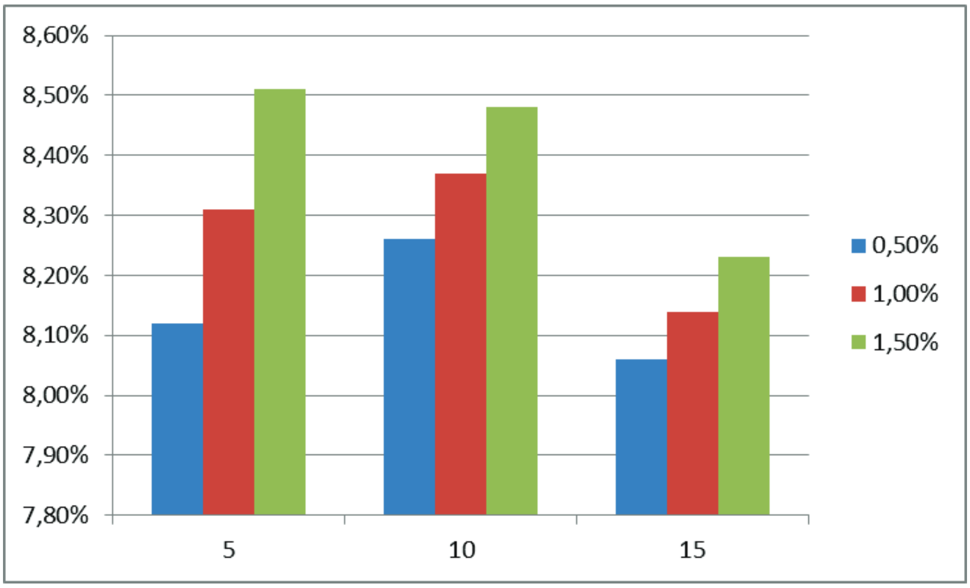
Por último, obsérvese que, en este caso, al ser las cuotas de interés constantes, sería indiferente utilizar el método de cuotas de amortización constantes que el método de términos amortizativos constantes.

c) Hallar la TAE de la operación para diferentes valores de la comisión de apertura y de la duración, para un tanto de descuento del 5%. Representar gráficamente los resultados obtenidos.

Utilizando la hoja de cálculo EXCEL, accedemos a “Datos” > “Análisis” > “Buscar objetivo”, para obtener los resultados de la siguiente tabla:

$i_a \setminus n$	**5**	**10**	**15**
0,50%	8,12%	8,26%	8,06%
1,00%	8,31%	8,37%	8,14%
1,50%	8,51%	8,48%	8,23%

A continuación, vamos a representar gráficamente los resultados obtenidos en la tabla anterior, que corroboran el razonamiento presentado en el apartado b).



d) ¿Dependería el valor de la TAE del método empleado para la amortización del principal?

A pesar de lo afirmado en el último párrafo del apartado b) de este ejercicio, sí dependería porque, evidentemente, el resultado de la TAE sería distinto si las cuotas de amortización del préstamo fuesen variables, en particular, si variaran en progresión aritmética o en progresión geométrica. Cualquier ejemplo serviría para comprobar esta afirmación.

3.4. Préstamos con carencia parcial de amortización

Ejercicio 4. Un préstamo plantea la posibilidad de que el prestatario amortice un determinado porcentaje del principal durante los $n-1$ primeros años de su duración y el resto al finalizar el año *n*. Si el préstamo se amortiza mediante el método francés de amortización, se pide:

a) Determinar la expresión general de la TAE de la operación.
b) Discutir el resultado obtenido en el apartado a).
c) Hallar la TAE de la operación para diferentes valores de la duración y del porcentaje amortizado en los $n-1$ primeros períodos, suponiendo que la comisión de apertura es del 0,5% y el tipo de interés del 6%. Representar gráficamente los resultados obtenidos.
d) ¿Dependería el valor de la TAE del método empleado para la amortización del principal?

Resolución:

a) Determinar la expresión general de la TAE de la operación.

Para la resolución de este apartado, vamos a utilizar las siguientes variables:

- C_0: Principal del préstamo.
- n: Duración del préstamo.
- i_a: Comisión de apertura del préstamo.
- α: Porcentaje en que el préstamo será amortizado durante los $n-1$ primeros períodos.
- i^*: TAE de la operación.

En este caso, los términos amortizativos constantes del préstamo durante los $n-1$ primeros períodos son:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a = \frac{\alpha C_0 i}{1-(1+i)^{-n+1}}.$$

Por tanto, el esquema temporal de la operación, desde el punto de vista de la entidad financiera (que coincidiría con el punto de vista del prestatario pues la comisión de apertura es una característica comercial bilateral), sería el siguiente:

Entrega:	C_0				
Recibe:	$C_0 i_a$	a	a	$\dots$	$(1-\alpha)C_0(1+i)^n$
	0	1	2	$\dots$	n

La ecuación de equivalencia financiera en el origen quedaría de la siguiente forma:

$$C_0 = C_0 i_a + \frac{\alpha C_0}{a_{\overline{n-1}|i}} a_{\overline{n-1}|i^*} + (1-\alpha)C_0 \frac{(1+i)^n}{(1+i^*)^n},$$

de donde, simplificando C_0 y haciendo operaciones elementales, obtenemos:

$$1 - i_a = \frac{\alpha}{a_{\overline{n-1}|i}} a_{\overline{n-1}|i^*} + (1-\alpha)\frac{(1+i)^n}{(1+i^*)^n}.$$

b) Discutir el resultado obtenido en el apartado a).

Si la comisión de apertura aumenta (*ceteris paribus*), el primer miembro de la ecuación disminuye y, por tanto, la expresión incluida en el segundo miembro. Como el factor de actualización y valor actual de una renta temporal, unitaria y pospagable son decrecientes con respecto al tipo de interés, podemos deducir que, al ser el resto de parámetros constantes, la TAE aumentaría. Por tanto, de una manera esquemática, podemos afirmar que:

$$i_a \uparrow \Rightarrow i^* \uparrow.$$

Por otra parte, si la duración de la operación aumenta (*ceteris paribus*), el primer miembro de la ecuación permanece inalterado, mientras que el segundo miembro disminuye. En efecto, la expresión $\dfrac{\alpha}{a_{\overline{n-1}|i}} a_{\overline{n-1}|i^*}$ es decreciente con respecto de n. Para ello, es suficiente comparar las expresiones:

$$\frac{(1+i^*)^{-1}+(1+i^*)^{-2}+\cdots+(1+i^*)^{-(n-1)}}{(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots+(1+i)^{-(n-1)}}$$

y

$$\frac{(1+i^*)^{-1}+(1+i^*)^{-2}+\cdots+(1+i^*)^{-(n-1)}+(1+i^*)^{-n}}{(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots+(1+i)^{-(n-1)}+(1+i)^{-n}},$$

donde $i^* > i$, resultando que la primera es menor que la segunda. Por último, el decrecimiento de $\dfrac{(1+i)^n}{(1+i^*)^n}$ con respecto de n es evidente. Como el factor de actualización y el valor actual de una renta temporal, unitaria y pospagable son crecientes con respecto al tipo de interés, podemos deducir que, en este caso, la TAE disminuiría. Por tanto, de una manera esquemática, podemos afirmar que:

$$n \uparrow \Rightarrow i^* \downarrow .$$

Por último, si el porcentaje amortizado en los $n-1$ primeros períodos aumenta (*ceteris paribus*), el primer miembro de la ecuación permanece inalterado, mientras que el segundo miembro disminuye. En efecto, la expresión $\dfrac{\alpha}{a_{\overline{n-1}|i}} a_{\overline{n-1}|i^*} + (1-\alpha)\dfrac{(1+i)^n}{(1+i^*)^n}$ es decreciente con respecto de α. Para ello, es suficiente comparar las expresiones:

$$\frac{(1+i^*)^{-1}+(1+i^*)^{-2}+\cdots+(1+i^*)^{-(n-1)}}{(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+\cdots+(1+i)^{-(n-1)}}$$

y

$$\frac{(1+i^*)^{-n}}{(1+i)^{-n}} = \frac{(1+i)^n}{(1+i^*)^n},$$

donde $i^* > i$, resultando que la primera es menor que la segunda. Por tanto, lo que crece el primer sumando, $\dfrac{\alpha}{a_{\overline{n-1}|i}} a_{\overline{n-1}|i^*}$, es mayor que lo que decrece el segundo sumando del segundo miembro, $(1-\alpha)\dfrac{(1+i)^n}{(1+i^*)^n}$. Esto supone que el segundo miembro de la igualdad, en su conjunto, crece al aumentar α. Como el factor de actualización y el valor actual de una renta temporal, unitaria y pospagable son decrecientes con respecto al tipo de interés, podemos deducir que, al ser el resto de parámetros constantes, la TAE aumentaría. Por tanto, de una manera esquemática, podemos afirmar que:

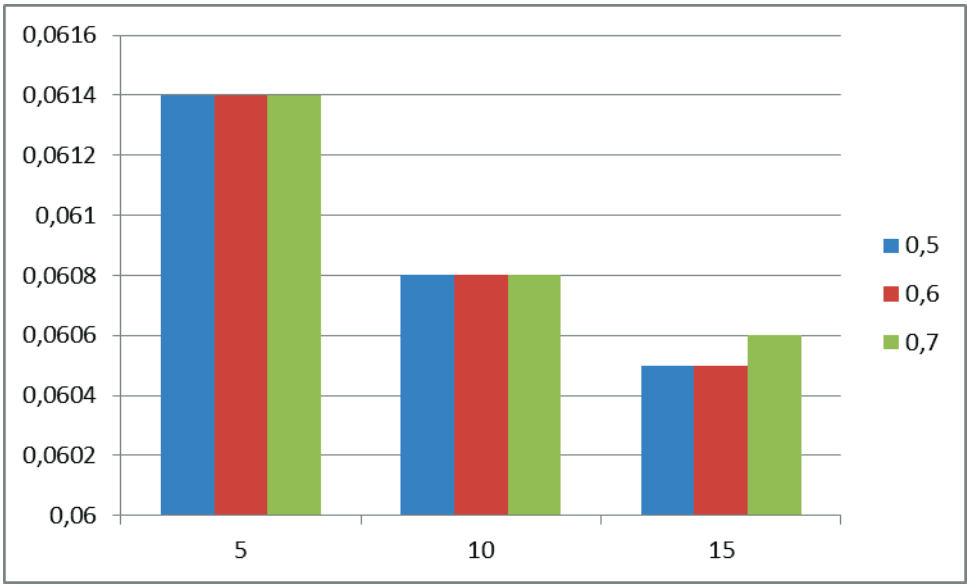
$$\alpha \uparrow \Rightarrow i^* \uparrow .$$

c) Hallar la TAE de la operación para diferentes valores de la duración y del porcentaje amortizado en los n – 1 primeros períodos, suponiendo que la comisión de apertura es del 0,5% y el tipo de interés del 6%. Representar gráficamente los resultados obtenidos.

Utilizando la hoja de cálculo EXCEL, accedemos a "Datos" > "Análisis" > "Buscar objetivo", para obtener los resultados de la siguiente tabla:

$\alpha \setminus n$	**5**	**10**	**15**
0,50	6,14%	6,08%	6,05%
0,60	6,14%	6,08%	6,05%
0,70	6,14%	6,08%	6,06%

A continuación, vamos a representar gráficamente los resultados obtenidos en la tabla anterior, que corroboran el razonamiento presentado en el apartado b).



e) **¿Dependería el valor de la TAE del método empleado para la amortización del principal?**

Sí dependería porque, evidentemente, el resultado de la TAE sería distinto si las cuotas de amortización del préstamo fuesen variables, en particular, si variaran en progresión aritmética o en progresión geométrica. Cualquier ejemplo serviría para comprobar esta afirmación.

3.5. Préstamos con tipo de interés variable y términos amortizativos constantes

Ejercicio 5. El día 1 de enero de 2022 se firmó un préstamo de 50.000 euros de principal para ser amortizado en tres años mediante semestralidades constantes, tomando como referencia el EURIBOR anual publicado el mes anterior (a principios de los meses de junio y diciembre) más un 1% de diferencial. Para ello, se tomará, como semestralidad constante, la que resulte del cálculo con los datos del primer año. Se pide:

a) Construir el cuadro de amortización previsto para este préstamo.
b) Determinar si el préstamo se cancela anticipadamente o después de los tres años inicialmente previstos.
c) Calcular la TAE de la operación.
d) Efectuar un planteamiento general de la operación anterior.

Resolución:

a) **Construir el cuadro de amortización de este préstamo.**

Para ello, los tipos de interés a aplicar serían los siguientes (los tipos de interés estimados están en color rojo):

Mes	EURIBOR	Tipo de interés anual	Tipo de interés semestral
Diciembre de 2021	−0,502%	0,498%	0,249%
Junio de 2022	0,852%	1,852%	0,926%
Diciembre de 2022	2,828%	3,828%	1,914%
Junio de 2023	3,000%	4,000%	2,000%
Diciembre de 2023	3,000%	4,000%	2,000%
Junio de 2024	2,100%	3,100%	1,550%
Diciembre de 2024	2,100%	3,100%	1,550%

Por tanto, el cuadro de amortización quedaría como sigue:

Semestre	Tipo de interés	Semestralidad	Cuota de interés	Cuota de amortización	Capital vivo
-	-	-	-	-	50.000,00
Primero de 2022	0,249%	8.406,11	124,50	8.281,61	41.718,39
Segundo de 2022	0,926%	8.406,11	386,31	8.019,80	33.698,59
Primero de 2023	1,914%	8.406,11	644,99	7.761,12	25.937,48
Segundo de 2023	2,000%	8.406,11	518,75	7.887,36	18.050,12
Primero de 2024	2,000%	8.406,11	361,00	8.045,11	10.005,01
Segundo de 2024	1,550%	8.406,11	155,08	8.251,03	1.753,98
Primero de 2025	1,550%	1.781,17	27,19	1.753,98	0,00

La semestralidad constante se ha calculado de la siguiente forma:

$$a = \frac{50.000 \cdot 0{,}00249}{1-(1+0{,}00249)^{-6}} = 8.406{,}11 \text{ euros.}$$

b) Determinar si el préstamo se cancela anticipadamente o después de los tres años inicialmente previstos.

Como puede observarse en el cuadro de amortización, se hace necesaria un séptima semestralidad (en este caso, de 1.781,17 euros) para amortizar completamente el préstamo. Este resultado es lógico si se tiene en cuenta que, durante los tres años de duración del préstamo, los intereses se han ido incrementando.

c) Calcular la TAE de la operación.

Para calcular la TAE de la operación, planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la misma:

$$50.000 = 8.406{,}11 a_{\overline{6}|i^*_{(2)}} + 1.781{,}17(1+i^*_{(2)})^{-7}.$$

Desplegando la pestaña "Datos" > "Análisis y si" > "Buscar objetivo", obtenemos que $i^*_{(2)} = 0{,}012128866$, de donde:

$$i^* = (1+i^*_{(2)})^2 - 1 = 0{,}0244 = 2{,}44\%.$$

d) Efectuar un planteamiento general de la operación anterior.

Para el planteamiento de este apartado, vamos a utilizar las siguientes variables:

- C_0: Principal del préstamo.
- *n*: Duración del préstamo en años.
- *k*: Frecuencia de los pagos.
- i_j: Tipo de interés nominal anual aplicable al préstamo durante el período *j* ($j = 1,2,\ldots,kn,\ldots$).
- $i_{j(k)} = \frac{i_j}{k}$: Tipo de interés equivalente por *k*-ésimo de año, aplicable al préstamo durante el período *j* ($j = 1,2,\ldots,kn,\ldots$).
- *m*: *k*-ésimo de año en el que se produce la amortización total del préstamo.
- i^*: TAE de la operación.

En este caso, el cuadro de amortización del préstamo quedaría como sigue:

***k*-ésimo**	**Tipo de interés**	**Término**	**Cuota de interés**	**Cuota de amortización**	**Capital vivo**
-	-	-	-	-	C_0
1	$i_{1(k)} = \frac{i_1}{k}$	a	$C_0 i_{1(k)}$	$a - C_0 i_{1(k)}$	C_1
2	$i_{2(k)} = \frac{i_2}{k}$	a	$C_1 i_{2(k)}$	$a - C_1 i_{2(k)}$	C_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
kn	$i_{kn(k)} = \frac{i_{kn}}{k}$	a	$C_{kn-1} i_{kn(k)}$	$a - C_{kn-1} i_{kn(k)}$	C_{kn}
$kn+1$	$i_{kn+1(k)} = \frac{i_{kn+1}}{k}$	a	$C_{kn} i_{kn+1(k)}$	$a - C_{kn} i_{kn+1(k)}$	C_{kn+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$i_{m(k)} = \frac{i_m}{k}$	$C_{m-1}(1+i_{m(k)})$	$C_{m-1} i_{m(k)}$	C_{m-1}	0,00

El término amortizativo constante, por *k*-ésimo de año, se ha calculado de la siguiente forma:

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{kn}|i_{1(k)}}}.$$

Para calcular la TAE de la operación, planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la misma:

$$C_0 = a \cdot a_{\overline{m-1}|i^*_{(k)}} + C_{m-1}(1 + i_{m(k)})(1 + i^*_{(k)})^{-m},$$

de donde la TAE es:

$$i^* = (1 + i^*_{(k)})^k .$$