Prólogo

El manual “Curso de Matemáticas Aplicadas a la Empresa” está diseñado para los alumnos del Máster Interuniversitario en Matemáticas que se inician en el mundo de la empresa. Por ello, este libro contiene un resumen de los aspectos más cuantitativos de la Matemática Financiera y del Análisis de Inversiones.

Este manual se ha estructurado como se indica a continuación. En primer lugar, se establecen las bases del proceso de decisión financiera mediante la introducción de las relaciones de preferencia e indiferencia (equivalencia) financiera, que se articulan a través del concepto de ley financiera (de capitalización o de descuento). Aquí el alumno tiene la oportunidad de conocer un nuevo espacio vectorial: el espacio vectorial de los capitales financieros según una ley financiera de valoración previamente fijada. También se establecen las bases para definir la equivalencia entre dos conjuntos de capitales financieros, lo que da origen al concepto de saldo financiero o reserva matemática de una operación financiera.

El concepto de ley financiera es suficientemente amplio para dar cabida, sobre todo en investigación, a multitud de expresiones particulares de una ley. No obstante, en este curso, se analizan las leyes clásicas de capitalización

(capitalización simple y capitalización compuesta) y de descuento (descuento comercial, descuento racional y descuento compuesto), cada uno de ellos con las expresiones concretas de sus magnitudes derivadas (factor, rédito, tanto, tanto instantáneo e interés/descuento).

El siguiente bloque está dedicado al importante concepto de renta (prepagable, pospagable, diferida, anticipada, unitaria, constante, variable, fraccionada, discreta, continua, temporal perpetua, etc.) que va a dar paso a la teoría del análisis de inversiones y al estudio de las operaciones clásicas de constitución y de amortización de capitales.

El manual está pensado como una herramienta de trabajo para los alumnos del Máster, por lo que las demostraciones de los resultados presentados en el mismo no se han incorporado al material docente y son los estudiantes los que deberán aportar soluciones basándose en los conocimientos previamente adquiridos durante sus estudios de Grado.

Como autoevaluación de los conocimientos adquiridos, el manual contiene, en la sección final, una compilación de ejercicios sobre los principales aspectos tratados en el curso. La superación de estas actividades facultan al alumno para enfrentarse a nuevos contenidos, más avanzados, de la Matemática Financiera.

LOS AUTORES.

Capítulo 1

Fundamentos de decisión financiera

1.1. Bases para la decisión financiera

Todo sujeto económico prefiere los bienes presentes sobre los futuros a igualdad de cantidad y calidad, y ello significa que el tiempo influye en la apreciación de los bienes económicos.

El tiempo es denominado *bien económico negativo*, en cuanto que el alejamiento de la disponibilidad de un bien debe ser compensado con un aumento de cuantía para que sean indiferentes (*principio de subestimación de las necesidades futuras*).

Se denomina *capital financiero* a la medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad, vencimiento o entrega. Es, por tanto, una magnitud bidimensional (C, t), siendo $C \in \mathbb{R}^+$ y $t \in \mathbb{R}$.

Se denomina *espacio financiero* E al conjunto de todos los posibles valores del capital financiero:

$$E = \{(C, t)/C \in \mathbb{R}^+;\ t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

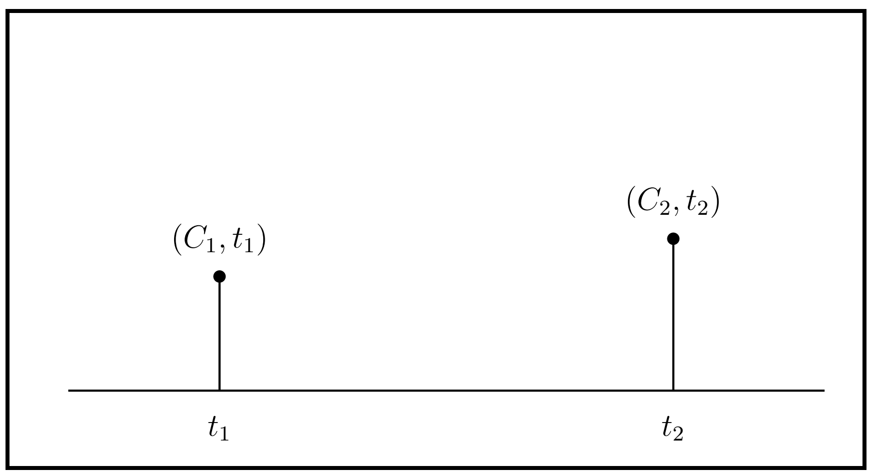

Figura 1

Principio de sustitución o proyección financiera: el sujeto económico es capaz de establecer un criterio de comparación entre capitales de una forma indirecta a través de la proyección o valoración en un punto de referencia p.

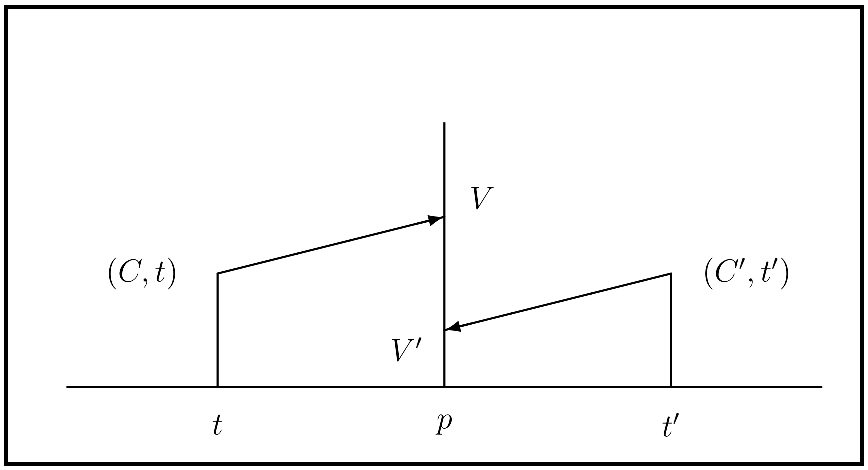

Figura 2

Dos capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2) son *equivalentes* cuando tienen el mismo sustituto o proyección V en p:

$$[(C_1, t_1) \sim_p (C_2, t_2)] \Leftrightarrow [\mathrm{proy}_p(C_1, t_1) = \mathrm{proy}_p(C_2, t_2)].$$

$\sim_p$ verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, por lo que es una *relación de equivalencia*. El *conjunto cociente* es:

$$E' = E/\sim_p = \{(V, p)/V = \mathrm{proy}_p(C, t)\}.$$

Dados dos capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2), diremos que (C_2, t_2) es *preferible o indiferente* a (C_1, t_1) si se verifica que $V_2 = \mathrm{proy}_p(C_2, t_2)$ es mayor o igual a $V_1 = \mathrm{proy}_p(C_1, t_1)$:

$$[(C_1, t_1) \preceq_p (C_2, t_2)] \Leftrightarrow [\mathrm{proy}_p(C_1, t_1) \leq \mathrm{proy}_p(C_2, t_2)].$$

$\preceq_p$ verifica las propiedades reflexiva, transitiva y conexa sobre E y, además, la propiedad antisimétrica sobre E', por lo que es una *relación de orden total*.

La expresión o modelo matemático del criterio de proyección financiera que, para todo (C, t), permite obtener V, fijado p, recibe el nombre de *ley financiera aplicada en* p y se simboliza por:

$$V = F(C, t, p) = \text{proy}_p(C, t).$$

- Cuando $t \leq p$, $F(C, t, p) = L(C, t, p)$, se denomina *ley financiera de capitalización en* p.

- Cuando $t \geq p$, $F(C, t, p) = A(C, t, p)$, se denomina *ley financiera de descuento en* p.

Se llama *ley financiera completa en* p a una expresión:

$$F(C, t, p) = \begin{cases} L(C, t, p), & \text{para} \quad t \leq p. \\ A(C, t, p), & \text{para} \quad t \geq p. \end{cases}$$

Al variar p, se obtiene una familia de leyes financieras del mismo tipo que se denomina *sistema financiero de capitalización*, para $t \leq p$, *sistema financiero de descuento*, para $t \geq p$ y *sistema financiero completo*, si es válido tanto para $t \leq p$ como para $t \geq p$.

Al criterio de proyección financiera le exigiremos las siguientes propiedades:

1. $F(C, t, p) > 0$.

2. $F(C, t, p) = C \cdot F(1, t, p) = C \cdot F(t, p)$.

3. $F(C, p, p) = F(C, t, t) = C$.

4. $\frac{\Delta_t F(t,p)}{\Delta t} < 0$ y $\frac{\Delta_p F(t,p)}{\Delta p} > 0$.

   Cuando sean derivables:

$$\frac{\partial F(t,p)}{\partial t} < 0 \text{ y } \frac{\partial F(t,p)}{\partial p} > 0.$$

Como consecuencias, se deduce que:

1. $L(t,p) \geq 1$, con $t \leq p$ y $A(t,p) \leq 1$, con $t \geq p$.

2. $(C_1, t_1) \sim_p (C_2, t_2) \Leftrightarrow V_1 = C_1 \cdot F(t_1, p) = C_2 \cdot F(t_2, p) = V_2$.

3. $(C_1, t_1) \preceq_p (C_2, t_2) \Leftrightarrow V_1 = C_1 \cdot F(t_1, p) \leq C_2 \cdot F(t_2, p) = V_2$.

El capital (S, τ) es suma financiera de (C_1, t_1) y (C_2, t_2), si se verifica que la proyección financiera del capital suma (S, τ) es igual a la suma de las proyecciones en p de los capitales sumandos (C_1, t_1) y (C_2, t_2). Así, denominando:

$$V_1 = \text{proy}_p(C_1, t_1) = C_1 \cdot F(t_1, p);\ V_2 = \text{proy}_p(C_2, t_2) = C_2 \cdot F(t_2, p)$$

y

$$V_S = \text{proy}_p(S, \tau) = S \cdot F(\tau, p),$$

$$[(C_1, t_1) + (C_2, t_2) = (S, \tau)] \Leftrightarrow [V_S = V_1 + V_2],$$

o, lo que es lo mismo,

$$S \cdot F(\tau, p) = C_1 \cdot F(t_1, p) + C_2 \cdot F(t_2, p).$$

La operación suma financiera es cerrada en E', verifica las propiedades asociativa y conmutativa y tiene como elemento neutro el capital nulo $(0, p)$, por lo que dota al conjunto E' de los capitales financieros de la estructura de semigrupo conmutativo.

Por un proceso de simetrización respecto a la suma, puede ampliarse el espacio financiero E' dando entrada a los capitales de cuantía negativa, que tendrían sentido subjetivando el capital financiero, es decir, distinguiendo con referencia a una persona entre *capital positivo o acreedor* y *capital negativo o deudor*. El nuevo espacio obtenido es $\overline{E}'$, que incluye a E'.

En $\overline{E}'$ la suma financiera tiene elemento simétrico, por lo que $(\overline{E}', +)$ es un grupo conmutativo. A continuación, se define el producto de un capital financiero por un número real de la siguiente forma:

$$[\alpha \cdot (C_1, t_1) = (C_2, t_2)] \Leftrightarrow [\alpha \cdot V_1 = V_2],$$

o, lo que es lo mismo,

$$\alpha \cdot C_1 . F(t_1, p) = C_2 \cdot F(t_2, p).$$

Se verifican las propiedades: distributiva respecto a la suma financiera, distributiva respecto a la suma en $\mathbb{R}$, asociativa respecto al producto en $\mathbb{R}$ y existencia de elemento neutro $1 \in \mathbb{R}$.

El conjunto $\overline{E}'$ con las dos operaciones: interna (suma) y externa sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ goza de las propiedades que caracterizan la estructura de espacio vectorial, por lo que a $\overline{E}'$ se le denomina *espacio vectorial financiero*.

1.2. Operaciones financieras

Se entiende por *operación financiera* toda acción por la que se intercambian o sustituyen unos capitales financieros por otros con distintos vencimientos. Se denomina *origen* de la operación al punto donde vence el primer capital y *final* al momento de vencimiento del último capital. La diferencia entre ambos vencimientos es la *duración*.

La persona que entrega el primer capital inicia la operación como acreedora y a su compromiso total se le denomina *prestación*. Por el contrario, la persona que recibe ese primer capital es inicialmente deudora y a su compromiso total se le designa *contraprestación*.

Se establece el *postulado de equivalencia en las operaciones financieras*: "Toda operación financiera implica la existencia de una equivalencia financiera entre las sumas de los capitales que componen la prestación y la contraprestación, en base a una ley financiera previamente fijada y aceptada por ambas partes".

Cuando la ley financiera es conocida, la operación se denomina *perfecta* y, en caso contrario, recibe el nombre de *imperfecta*.

Las *condiciones sustantivas* son las que explicitan el postulado de equivalencia financiera entre los compromisos de ambas partes, es decir, la ley financiera, cuando todos los capitales que integran la operación tengan vencimiento cierto y, en caso contrario, la ley financiera y el modelo de probabilidad que describe el fenómeno aleatorio asociado a los vencimientos de los capitales.

Las *condiciones formales* son aquéllas que, sin tener el alcance de las anteriores, sirven para concretar la operación.

Las operaciones financieras pueden clasificarse atendiendo a distintos criterios:

- Según la naturaleza de los capitales que la integran:
  - Operaciones financieras ciertas.
  - Operaciones financiero-aleatorias.
- Respecto a la forma de su definición:
  - Operaciones predeterminadas o definidas ex ante.
  - Operaciones posdeterminadas o definidas ex post.
- En base al grado de liquidez interna:
  - Operaciones con liquidez interna total.
  - Operaciones con liquidez interna parcial o condicionada.
- En cuanto a su duración:
  - Operaciones a corto plazo.
  - Operaciones a largo plazo.
- Observando la distribución de los compromisos de las partes:
  - Operaciones simples.
  - Operaciones compuestas.
- Atendiendo a la posición del punto p de aplicación:

- Operaciones de capitalización.
- Operaciones de descuento.
- Operaciones mixtas.

▪ Según el sentido crediticio de la operación:

- Operaciones de crédito unilateral.
- Operaciones de crédito recíproco.

▪ Respecto a las condiciones sustantivas:

- Operaciones homogéneas.
- Operaciones heterogéneas o complejas.

Supongamos una operación financiera cierta, compuesta y homogénea, definida por el intercambio entre los dos conjuntos de capitales siguientes:

$$\text{Prestación} = \{(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_m, t_m)\},$$

$$\text{Contraprestación} = \{(C'_1, t'_1), (C'_2, t'_2), \ldots, (C'_n, t'_n)\},$$

en base a la ley financiera $F(t, p)$, siendo t_1 el origen y $t_f = t_m$ ó $t_f = t'_n$ el final de la operación.

El postulado de equivalencia en las operaciones financieras:

$$\{(C_i, t_i)\}_{i=1}^{m} \sim_{F(t,p)} \{(C'_j, t'_j)\}_{j=1}^{n}$$

obliga a que se verifique la igualdad entre las sumas de los capitales que componen la prestación y la contraprestación en cualquier punto τ:

$$S = \sum_{i=1}^{m} C_i \frac{F(t_i, p)}{F(\tau, p)} = \sum_{j=1}^{n} C'_j \frac{F(t'_j, p)}{F(\tau, p)} = S',$$

habiendo representado con S y S' las cuantías de los capitales (S, τ) y (S', τ), suma financiera en τ de la prestación y contraprestación, respectivamente.

Supuesto que τ es un punto intermedio de la operación, es decir, contenido en su intervalo de definición $\tau \in [t_1, t_f]$, divide a ésta en dos partes sin elementos comunes: la operación pasada o contenida en el intervalo $[t_1, \tau]$ y la operación pendiente o futura, contenida en el intervalo $(\tau, t_f]$. Así, los capitales (S, τ) y (S', τ) pueden descomponerse en dos sumandos. En efecto, si llamamos:

$(S_1, \tau) =$ Suma en τ de los capitales de la prestación anteriores a τ o comprendidos en el intervalo $[t_1, \tau]$,

$(S_2, \tau) =$ Suma en τ de los capitales de la prestación posteriores a τ o contenidos en el intervalo $(\tau, t_f]$,

$(S'_1, \tau) =$ Suma en τ de los capitales de la contraprestación anteriores a τ o comprendidos en el intervalo $[t_1, \tau]$,

$(S'_2, \tau) =$ Suma en τ de los capitales de la contraprestación posteriores a τ o situados en el intervalo $(\tau, t_f]$,

se verifica que:

$$S = S_1 + S_2 = S'_1 + S'_2 = S'.$$

Trasponiendo términos, resulta:

$$S_1 - S'_1 = S'_2 - S_2 = R_\tau^+.$$

El capital (R_τ^+, τ) expresa la diferencia de cuantías entre las sumas en τ de la prestación y contraprestación pasadas:

$$R_\tau^+ = S_1 - S'_1$$

y también entre las sumas en τ de la contraprestación y prestación futuras:

$$R_\tau^+ = S_2' - S_2.$$

El capital (R_τ^+, τ) recibe el nombre de *reserva matemática o saldo financiero en τ por la derecha* y es el capital que restablece el equilibrio financiero entre las obligaciones pasadas y también entre las futuras.

La determinación de la cuantía de la reserva R_τ^+ a través de la diferencia de valor de los compromisos pasados:

$$R_\tau^+ = S_1 - S_1'$$

recibe el nombre de *método retrospectivo*, designándose *método prospectivo* a la obtención de R_τ^+ como diferencia de valor de los compromisos futuros:

$$R_\tau^+ = S_2' - S_2.$$

Existe un tercer método para el cálculo de la reserva matemática de una operación financiera en un punto τ, que se basa en el conocimiento de la reserva en un punto anterior τ_1, y en la parte de operación comprendida entre ambos, y que recibe el nombre de *método recurrente*.

Consiste en realidad en aplicar el método retrospectivo, pero sustituyendo el intercambio de capitales realizado con anterioridad a τ_1 por la entrega del capital único $(R_{\tau_1}^+, \tau_1)$ por parte de la prestación o de la contraprestación según que el signo obtenido al calcularlo hubiese sido positivo o negativo.

Si en lugar de descomponer la duración $[t_1, t_f]$ en los intervalos $[t_1, \tau] \cup (\tau, t_f]$ lo hacemos en $[t_1, \tau) \cup [\tau, t_f]$, es decir, incluimos el punto τ junto con la parte de operación futura y no con la pasada, surge el concepto de *reserva* *matemática en τ por la izquierda*, cuya cuantía representaremos por R_τ^-, en contraposición con la reserva por la derecha R_τ^+.

Esta distinción sólo tiene sentido en los puntos en que venza algún capital, pues sólo en estos puntos serán distintos los valores R_τ^+ y R_τ^-, siendo su diferencia justamente la cuantía de ese capital. Si C_τ pertenece a la prestación:

$$R_\tau^+ = R_\tau^- + C_\tau,$$

o, si C'_τ pertenece a la contraprestación:

$$R_\tau^+ = R_\tau^- - C'_\tau.$$

En el origen:

$$R_{t_1}^- = 0;\ R_{t_1}^+ = C_1.$$

En el final:

$$R_{t_f}^+ = 0;\ R_{t_f}^- = -C_m \text{ ó } C'_n.$$

Capitales financiero-aleatorios son aquellos en los que al menos una de sus componentes no es conocida de forma cierta, sino en términos de probabilidad.

Formalmente el *capital financiero-aleatorio* se define como "toda variante bidimensional (ξ, η) que representa a todos y cada uno de los posibles capitales asociados a los resultados de un fenómeno aleatorio".

Con ξ se indica la componente unidimensional cuantía aleatoria y con η el vencimiento aleatorio. La función de distribución de la variante bidimensional o función de distribución conjunta se expresa por:

$$G(C,t) = \text{Prob}(\xi \leq C, \eta \leq t).$$

Fijado un criterio de proyección en p, cada concreción (C, t) de la variable (ξ, η) tendrá una proyección cierta en p: (V, p).

Si con ξ' representamos la variante unidimensional que recoge las proyecciones en p de cada una de las posibles concreciones (C, t):

$$(\xi, \eta) \sim_p (\xi', p) \sim (\overline{\xi}', p),$$

siendo la primera una equivalencia financiera y la segunda una equivalencia estadística.

Los postulados y definiciones fundamentales de la Matemática de las Operaciones Financieras son:

Postulado I. *Principio de sustitución o proyección financiera para capitales ciertos*: "Dado un punto p de referencia y un capital cualquiera (C, t), existe un criterio que permite obtener el capital (V, p), llamado proyección o sustitución financiera en p".

Postulado II. *Principio de sustitución para capitales aleatorios*: "El capital cierto (V, p) es la proyección o sustituto del aleatorio (ξ, η) si se verifica $V = E[\xi'] = \overline{\xi}'$, siendo $\xi' = \mathrm{proy}_p(\xi, \eta)$ la variante cuantía de los capitales sustitutos o proyecciones en p, correspondientes a cada uno de los posibles valores de (ξ, η)".

Definición I. *Equivalencia financiera de capitales*: "Dos capitales ciertos o aleatorios son equivalentes respecto a una determinada ley financiera en p, cuando tienen el mismo sustituto cierto en dicho punto".

Definición II. *Relación de preferencia financiera*: "Un capital cierto o aleatorio es preferible o indiferente a otro cuando se verifica que la proyección financiera del primero es mayor o igual que la del segundo".

Definición III. *Producto de un capital por* $\alpha > 0$: "Se denomina producto de un capital cierto o aleatorio por $\alpha > 0$ a un nuevo capital cuya cuantía cierta o aleatoria ha sido multiplicada por α".

Definición IV. *Suma financiera de capitales*: "Un capital cierto o aleatorio es la suma financiera de un conjunto de capitales ciertos o aleatorios cuando se verifica que la proyección financiera del primero es la suma de las proyecciones financieras de los sumandos".

Definición V. *Equivalencia y relación de preferencia entre conjuntos de capitales*: "Dos conjuntos de capitales ciertos o aleatorios se dicen equivalentes, o el primer conjunto preferido al segundo, cuando lo son sus correspondientes capitales sumas".

Postulado III. *Principio de equivalencia en toda operación financiera*: "Toda operación financiera presupone la existencia de una equivalencia financiera entre los conjuntos de capitales que constituyen la prestación y la contraprestación de acuerdo con una ley financiera previamente establecida".

1.3. Magnitudes financieras

Son *magnitudes fundamentales* aquéllas que tienen la propiedad de permitir elegir independientemente entre sí sus unidades de medida y son consideradas base de las restantes magnitudes. Como magnitudes fundamentales y primarias de la disciplina, tomamos las componentes del capital financiero, esto es, la *cuantía* y el *vencimiento* simbolizados por C y t, respectivamente. De esta forma, las demás magnitudes tendrán una *dimensión* con respecto a la cuantía y otra respecto al tiempo.

Toda magnitud obtenida como resultado de operaciones realizadas con las fundamentales se denomina *magnitud derivada*.

Sean dos capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2), con $t_1 < t_2$, equivalentes según una ley financiera $F(t, p)$:

$$[(C_1, t_1) \sim_p (C_2, t_2)] \Leftrightarrow [C_1 \cdot F(t_1, p) = C_2 \cdot F(t_2, p)].$$

Si comparamos por cociente las cuantías, nos queda:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{F(t_1, p)}{F(t_2, p)} := f(t_1, t_2, p) > 1,$$

cociente que recibe el nombre de *factor financiero de desplazamiento positivo o a la derecha asociado al intervalo* (t_1, t_2):

$$C_2 = C_1 \cdot f(t_1, t_2, p).$$

Al cociente recíproco:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{F(t_2, p)}{F(t_1, p)} := f^*(t_1, t_2, p) < 1,$$

es decir, al inverso de $f(t_1, t_2, p)$:

$$f^*(t_1, t_2, p) = \frac{1}{f(t_1, t_2, p)},$$

se le denomina *factor financiero de desplazamiento negativo o a la izquierda asociado al intervalo* (t_1, t_2):

$$C_1 = C_2 \cdot f^*(t_1, t_2, p).$$

El factor financiero es una magnitud *adimensionada* o de dimensión cero. En los casos concretos de factores referidos a leyes de capitalización y a leyes de descuento, la notación y denominaciones son:

1. Factor de capitalización: $u(t_1, t_2, p) = \frac{C_2}{C_1} = \frac{L(t_1,p)}{L(t_2,p)} > 1.$

2. Factor de contracapitalización: $u^*(t_1, t_2, p) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{L(t_2,p)}{L(t_1,p)} < 1.$

3. Factor de descuento: $v(t_1, t_2, p) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{A(t_2,p)}{A(t_1,p)} < 1.$

4. Factor de contradescuento: $v^*(t_1, t_2, p) = \frac{C_2}{C_1} = \frac{A(t_1,p)}{A(t_2,p)} > 1.$

Propiedades:

1. Propiedad multiplicativa para intervalos consecutivos.

2. Posibilidad de expresar la ley en función de los factores.

Se designa con el nombre de *rédito* al complemento a la unidad, tomado en valor absoluto, del correspondiente factor. Partiendo de una ley de capitalización $L(t, p)$, se obtiene:

1. *Rédito de capitalización*:

$$i(t_1, t_2, p) = u(t_1, t_2, p) - 1 = \frac{L(t_1, p) - L(t_2, p)}{L(t_2, p)}.$$

2. *Rédito de contracapitalización*:

$$i^*(t_1, t_2, p) = 1 - u^*(t_1, t_2, p) = \frac{L(t_1, p) - L(t_2, p)}{L(t_1, p)}.$$

Los réditos son magnitudes de dimensión cero. Se verifica que:

$$i(t_1, t_2, p) = i^*(t_1, t_2, p) \cdot u(t_1, t_2, p),$$

o, lo que es lo mismo:

$$i^*(t_1, t_2, p) = i(t_1, t_2, p) \cdot u^*(t_1, t_2, p).$$

Por último, el *rédito de capitalización acumulado o referido a* p se define como la variación de $L(t, p)$ al pasar de t_1 a t_2:

$$\xi(t_1, t_2, p) = L(t_1, p) - L(t_2, p).$$

Se verifica que:

$$\xi(t_1, t_2, p) = i(t_1, t_2, p) \cdot L(t_2, p) = i^*(t_1, t_2, p) \cdot L(t_1, p).$$

Se trata también de una magnitud de dimensión cero. Si partimos de una ley de descuento $A(t, p)$, surgen las expresiones:

1. *Rédito de descuento*:

$$d(t_1, t_2, p) = 1 - v(t_1, t_2, p) = \frac{A(t_1, p) - A(t_2, p)}{A(t_1, p)}.$$

2. *Rédito de contradescuento*:

$$d^*(t_1, t_2, p) = v^*(t_1, t_2, p) - 1 = \frac{A(t_1, p) - A(t_2, p)}{A(t_2, p)}.$$

3. *Rédito de descuento acumulado*:

$$\eta(t_1, t_2, p) = A(t_1, p) - A(t_2, p).$$

Propiedades:

1. Posibilidad de expresar la ley en función de los réditos.

2. El rédito acumulado o referido a p goza de la propiedad aditiva para intervalos consecutivos.

3. Para cualquier intervalo (t_1, p) (resp. (p, t_2)) de extremo superior (resp. inferior) p se verifica la igualdad entre el rédito de capitalización (resp. descuento) y el rédito acumulado.

Se da el nombre de tanto a la magnitud que resulta de dividir el rédito por la amplitud del intervalo a que corresponde. Surgen así para una ley de capitalización las siguientes magnitudes:

1. *Tanto de capitalización*:

$$\rho(t_1, t_2, p) = \frac{i(t_1, t_2, p)}{t_2 - t_1} = \frac{L(t_1, p) - L(t_2, p)}{L(t_2, p) \cdot (t_2 - t_1)}.$$

2. *Tanto de contracapitalización*:

$$\rho^*(t_1, t_2, p) = \frac{i^*(t_1, t_2, p)}{t_2 - t_1} = \frac{L(t_1, p) - L(t_2, p)}{L(t_1, p) \cdot (t_2 - t_1)}.$$

3. *Tanto de capitalización acumulado*:

$$\mu(t_1, t_2, p) = \frac{\xi(t_1, t_2, p)}{t_2 - t_1} = \frac{L(t_1, p) - L(t_2, p)}{t_2 - t_1}.$$

Se trata de magnitudes de dimensión -1 respecto del tiempo y cero respecto de la cuantía. La magnitud *tanto instantáneo* se define como el límite del tanto ordinario cuando la amplitud del intervalo tiende a cero. Las expresiones en el caso de capitalización y supuesta $L(t,p)$ derivable son:

1. *Tanto instantáneo de capitalización*:

$$\rho(t,p) = \lim_{h\to 0} \rho(t,t+h,p) = \lim_{h\to 0} \frac{L(t,p) - L(t+h,p)}{L(t+h,p)\cdot h} = \frac{-\frac{\partial L(t,p)}{\partial t}}{L(t,p)}.$$

2. *Tanto instantáneo de contracapitalización*:

$$\rho^*(t,p) = \lim_{h\to 0} \rho^*(t,t+h,p) = \lim_{h\to 0} \frac{L(t,p) - L(t+h,p)}{L(t,p)\cdot h} = \frac{-\frac{\partial L(t,p)}{\partial t}}{L(t,p)}.$$

3. *Tanto instantáneo acumulado*:

$$\mu(t,p) = \lim_{h\to 0} \mu(t,t+h,p) = \lim_{h\to 0} \frac{L(t,p) - L(t+h,p)}{h} = \frac{-\partial L(t,p)}{\partial t}.$$

Como puede verse, los tantos instantáneos de capitalización y de contracapitalización coinciden:

$$\rho(t,p) = \rho^*(t,p) = \frac{-\frac{\partial L(t,p)}{\partial t}}{L(t,p)} = \frac{-\partial \ln L(t,p)}{\partial t}.$$

Por último, partiendo de una ley financiera de descuento, surgen los siguientes tantos:

1. *Tanto de descuento*:

$$\delta(t_1,t_2,p) = \frac{d(t_1,t_2,p)}{t_2 - t_1} = \frac{A(t_1,p) - A(t_2,p)}{A(t_1,p)\cdot(t_2 - t_1)}.$$

2. *Tanto de contradescuento*:

$$\delta^*(t_1,t_2,p) = \frac{d^*(t_1,t_2,p)}{t_2 - t_1} = \frac{A(t_1,p) - A(t_2,p)}{A(t_2,p)\cdot(t_2 - t_1)}.$$

3. *Tanto de descuento acumulado*:

$$\nu(t_1, t_2, p) = \frac{\eta(t_1, t_2, p)}{t_2 - t_1} = \frac{A(t_1, p) - A(t_2, p)}{t_2 - t_1}.$$

4. *Tanto instantáneo de descuento*:

$$\delta(t, p) = \lim_{h \to 0} \delta(t, t + h, p) = \lim_{h \to 0} \frac{A(t, p) - A(t + h, p)}{A(t, p) \cdot h} =$$

$$= \frac{-\frac{\partial A(t,p)}{\partial t}}{A(t, p)} = \frac{-\partial \ln A(t, p)}{\partial t}.$$

5. *Tanto instantáneo de descuento acumulado*:

$$\nu(t, p) = \lim_{h \to 0} \nu(t, t + h, p) = \lim_{h \to 0} \frac{A(t, p) - A(t + h, p)}{h} = \frac{-\partial A(t, p)}{\partial t}.$$

Conocido el tanto instantáneo acumulado, puede obtenerse la ley financiera:

$$L(t, p) = 1 + \int_t^p \mu(x, p) dx.$$

Además, conocido el tanto instantáneo, puede determinarse directamente la expresión del factor financiero para un intervalo cualquiera (t_1, t_2):

$$u(t_1, t_2, p) = e^{\int_{t_1}^{t_2} \rho(x,p) dx},$$

o la expresión de la ley financiera:

$$L(t, p) = e^{\int_t^p \rho(x,p) dx}.$$

Igual que en capitalización, integrando en las expresiones del tanto instantáneo de descuento y del tanto instantáneo de descuento acumulado para los intervalos (p,t) y (t_1,t_2), se obtienen las expresiones de la ley financiera y del factor de descuento:

$$A(t,p) = 1 - \int_p^t \nu(x,p)dx.$$

$$v(t_1,t_2,p) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \delta(x,p)dx}.$$

$$A(t,p) = e^{-\int_p^t \delta(x,p)dx}.$$

Dados dos capitales de igual cuantía y distintos vencimientos (C,t_1) y (C,t_2), con $t_1 < t_2$, sabemos que el primero es preferible financieramente al segundo, siendo su diferencia $(C,t_1) - (C,t_2)$ otro capital financiero (R,τ) tal que verifica:

$$[(C,t_1) - (C,t_2) = (R,\tau)] \Leftrightarrow [(C,t_1) = (C,t_2) + (R,\tau)].$$

Partiendo de una ley de capitalización $L(t,p)$ y considerando $\tau = t_1$, $\tau = t_2$ ó $\tau = p$, resultan los siguientes intereses:

$$(R,\tau) = (C,t_1) - (C,t_2) =$$

$$= \begin{cases} (I,t_2) & = \text{ interés ordinario o pospagable} \\ (I^*,t_1) & = \text{ interés anticipado o prepagable} \\ (I_p,p) & = \text{ interés acumulado o en } p. \end{cases}$$

Los valores I, I^* e I_p pueden obtenerse, respectivamente, de las expresiones:

$$I = C \cdot u(t_1,t_2,p) - C = C \cdot [u(t_1,t_2,p) - 1] = C \cdot i(t_1,t_2,p),$$

$$I^* = C - C \cdot u^*(t_1,t_2,p) = C \cdot [1 - u^*(t_1,t_2,p)] = C \cdot i^*(t_1,t_2,p),$$

$$I_p = C \cdot L(t_1, p) - C \cdot L(t_2, p) = C \cdot [L(t_1, p) - L(t_2, p)] = C \cdot \xi(t_1, t_2, p).$$

Los intereses son magnitudes de dimensión 1 respecto de la cuantía. Si en lugar de trabajar con una ley de capitalización lo hacemos ahora con una ley de descuento $A(t, p)$:

$$(R, \tau) = (C, t_1) - (C, t_2) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{lcl} (D, t_1) & = & \text{descuento ordinario o prepagable} \\ (D^*, t_2) & = & \text{descuento diferido o pospagable} \\ (D_p, p) & = & \text{descuento acumulado o en } p. \end{array} \right.$$

Los valores D, D^* y D_p pueden obtenerse, respectivamente, de las expresiones:

$$D = C - C \cdot v(t_1, t_2, p) = C \cdot [1 - v(t_1, t_2, p)] = C \cdot d(t_1, t_2, p),$$

$$D^* = C \cdot v^*(t_1, t_2, p) - C = C \cdot [v^*(t_1, t_2, p) - 1] = C \cdot d^*(t_1, t_2, p),$$

$$D_p = C \cdot A(t_1, p) - C \cdot A(t_2, p) = C \cdot [A(t_1, p) - A(t_2, p)] = C \cdot \eta(t_1, t_2, p).$$