Prefacio.

En el siglo XVII, los matemáticos Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz “descubrieron” el cálculo infinitesimal, ocasionando que las matemáticas cambiaran para siempre. En esa época del Renacimiento se desarrollaba la cultura del momento y consecuentemente la comunidad científica se torna más abierta a compartir ideas y conocimiento. La interacción entre matemáticos condujo al desarrollo de innumerables descubrimientos. Por consiguiente, la combinación del descubrimiento del cálculo infinitesimal y una mayor comunicación, condujeron a un gran número de desarrollos que nunca antes se habían producido.

En este manuscrito, se nombran a tres grandes matemáticos como representantes de los Teoremas de: Green, Stokes y Gauss. Ninguno de estos teoremas fue descubierto y demostrado por un solo hombre, sino por varios a lo largo de muchos años. Lagrange (1736-1813), fue el primero en buscar una prueba del Teorema de la Divergencia o de Gauss, y aunque no pudo demostrarlo, inició un viaje que continuaría Gauss (1777-1855) realizando grandes avances en la física y la matemática. Sin embargo, Ostrogradsky (1801-1861), obtuvo una demostración formal. Por otro lado, el Teorema de Green se convirtió en el próximo gran desafío, Green (1793-1841) propuso el teorema sin demostración y su trabajo habría quedado olvidado sin la ayuda de Thomson (1824-1907). Fue entonces cuando Cauchy (1789-1857) demostró el teorema mientras estaba involucrado con su propia integral de Cauchy.

Finalmente, con el Teorema de Stokes las matemáticas adoptaron un enfoque mucho más polivalente. En un principio, Green propuso por primera vez el teorema y nuevamente Thomson se dio cuenta de su gran poder y lo transmitió a la comunidad científica. Stokes (1819-1903) utilizó el teorema como un problema en uno de sus exámenes y por esa razón el teorema pasó a ser conocido por su nombre.

Varios años después, Hankel (1839-1873) lo demostró germinando la disciplina de las Matemáticas Aplicadas, dando sentido y solución a diferentes problemas de física e ingeniería.

Estos teoremas han tenido una gran influencia en la ciencia con aplicaciones que involucran electricidad, magnetismo, gravedad e incluso el flujo del calor. En la actualidad, se tienen explicaciones y soluciones a problemas que antes solo se imaginaban. Estos matemáticos han formado parte de las mentes más brillantes de la historia y a menudo olvidados, se merecen mucho más respeto del que normalmente se les brinda.

Almería, marzo del 2025.

1. Integración en caminos. Teorema de Green.

1.1 Caminos y trayectorias

Definición 1.1.1 Una trayectoria es una aplicación continua $\gamma : I \to \mathbb{R}^N$. Siendo $I = [a,b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.2 Un camino (o arco) es la imagen de la trayectoria, $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^N$, y grafo de la trayectoria es el subconjunto de $\mathbb{R}^{N+1}$

$$\{(t,\gamma(t)) : t \in [a,b]\}.$$

Se denotará las componentes del camino como:

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)), \quad \forall t \in [a,b].$$

En especial, estamos interesados en caminos en $\mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$

caminos planos y en caminos en $\mathbb{R}^3$,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Obsérvese que cada componente es una función continua de $I \to \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.1 Demuestra que $(t,\gamma(t))$ es un conjunto cerrado y acotado. ■

■ **Ejemplo 1.1**

1. $\gamma(t) = (t,t)$, donde $t \in [0,1]$.

2. El segmento que une los puntos P_0, P_1: $\gamma(t) = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in [0,1]$. En particular, en $\mathbb{R}^3$ se tiene

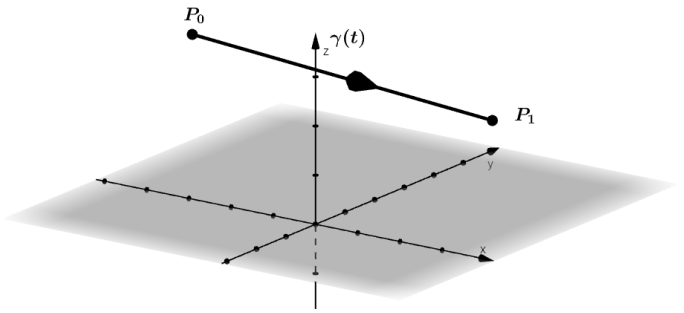

Figura 1.1.1: Segmento que une P_0, P_1

$$\gamma(t) = ((1-t)x_0 + tx_1, (1-t)y_0 + ty_1, (1-t)z_0 + tz_1)$$

siendo $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$.

■

Ejercicio 1.2 Calcula el segmento que une dos puntos P_0, P_1 para $t \in [a,b]$. Es decir, tal que $\gamma(a) = P_0$ y $\gamma(b) = P_1$. ■

Definición 1.1.3 Diremos a $\gamma(a)$ origen y a $\gamma(b)$ final de la curva. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces la curva es cerrada.

■ **Ejemplo 1.2**

1. La curva $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$.

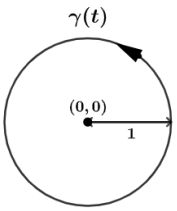

Figura 1.1.2: Curva circunferencia

2. La curva $\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ para $t \in [0, \pi]$.
3. La curva $\gamma(t) = (a + R\cos(t), b + R\sin(t))$ con $R > 0$ y $t \in [0, 2\pi]$.

4. La curva $\gamma(t) = (a\cos(2t), b\sin(2t))$, $a,b > 0$, para $t \in [0,\pi]$.

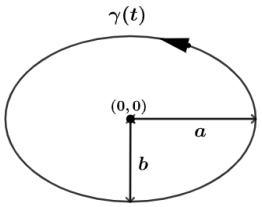

Figura 1.1.3: Curva elipse

■

Definición 1.1.4 Dada γ una curva, denotaremos por $-\gamma$ a su orientación inversa (o camino inverso). Es decir,

$$-\gamma(t) := \gamma(a+b-t).$$

También se puede denotar al camino inverso como γ^{-1}.

Definición 1.1.5 Diremos que γ es una curva simple si es inyectiva en $[a,b)$.

Definición 1.1.6 Una Curva de Jordan es una curva cerrada y simple.

Teorema 1.1.1 — Teorema clásico de la curva de Jordan. Toda curva de Jordan en $\mathbb{R}^2$ divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y se le llama exterior de la curva.

Dados dos caminos $\gamma_1(t)$ con $t \in [a,b]$ y $\gamma_2(t)$ con $t \in [b,c]$, tal que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Entonces se puede considerar la unión de los dos caminos:

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 := \begin{cases} \gamma_1, & t \in [a,b], \\ \gamma_2, & t \in [b,c]. \end{cases}$$

Ejercicio 1.3 Calcula el camino de un rectángulo en el plano con vértices: (0,0); (2,0); (2,1) y (0,1). ■

Ejemplo de camino en $\mathbb{R}^3$:

■ **Ejemplo 1.3** $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, k2\pi]$ es la hélice con k vueltas.

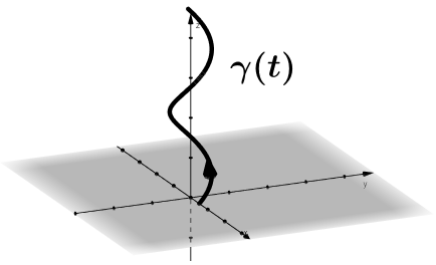

Figura 1.1.4: Camino hélice

■

Cabe destacar que toda función explícita $y = f(x)$ con $x \in [a,b]$ es un camino de la forma $\gamma(t) = (t, f(t))$ para $t \in [a,b]$. De esta manera, la parábola $y = x^2$ con $x \in [-1,1]$ es la curva $\gamma(t) = (t,t^2)$, $t \in [-1,1]$.

Definición 1.1.7 Diremos que un camino γ es regular (o suave) si es $\mathscr{C}^1(I)$ y además, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Siendo

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_N'(t)), \quad \forall t \in [a,b].$$

La interpretación geométrica de $\gamma'(t_0)$ para un $t_0 \in [a,b]$, es la del vector tangente a la curva $\gamma(t)$ en el punto $t = t_0$.

Definición 1.1.8 Generalizando la definición anterior, diremos que una curva es regular a trozos si es regular en una partición finita del intervalo I.

En general, los caminos a trozos suelen ser regulares a trozos, véase el Ejercicio 1.3.

De esta manera, si una curva γ es regular, podemos definir su vector tangente unitario en $t = t_0$, como:

$$T(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|},$$

donde $\|\gamma'(t_0)\| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_N'(t)^2}$. Por otro lado, $T'(t_0)$ será su vector normal.

Ejercicio 1.4 Demuestra que $T(t_0)$ y $T'(t_0)$ son ortogonales. ■

Si consideramos $\gamma'(t)$ como el vector velocidad. De esta manera, en $N = 2$ para simplificar la notación, se tiene que el módulo de la velocidad (o rapidez) es $\|\gamma(t)'\| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}$. Por otro lado, es sabido que si $v(t)$ es la rapidez de un móvil para $t \in [a,b]$, entonces el espacio recorrido de dicho móvil es

$$e(t) = \int_a^t v(s)\,ds.$$

Por tanto, la longitud de una curva γ hasta el instante $t_0 \in (a,b]$ es

$$l(\gamma(t_0)) = \int_{t=a}^{t_0} \|\gamma(t)'\|\,dt,$$

y la longitud recorrida en su totalidad es

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma(t)'\|\,dt.$$

Ejercicio 1.5 Demuestra que si $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, entonces $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. ■

Veamos a continuación algunos ejemplos del cálculo de longitudes de curvas:

■ Ejemplo 1.4

1. $\gamma(t) = (1-t)P_0 + tP_1$, con $t \in [0,1]$ y $P_0 = (x_0,y_0), P_1 = (x_1,y_1)$ dos puntos del plano. En este caso $\gamma'(t) = -P_0 + P_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ y por tanto,

$$l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}\,dt = \sqrt{(x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2}.$$

2. $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$. De esta forma, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ y en consecuencia $\|\gamma(t)'\| = 1$. Por tanto,
$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$
3. $\gamma(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $R > 0$. De esta forma, $\gamma'(t) = (-R\sin(t), R\cos(t))$ y en consecuencia $\|\gamma(t)'\| = R$. Por tanto,
$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R.$$
4. Cálculo de la longitud de una hélice con "3 vueltas". $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, con $t \in [0, 6\pi]$. De esta forma, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$ y en consecuencia $\|\gamma(t)'\| = \sqrt{2}$. Por tanto,
$$l(\gamma) = \int_0^{6\pi} \sqrt{2}\, dt = 6\sqrt{2}\pi.$$
5. Longitud de la cicloide $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. De esta forma, $\gamma'(t) = (1 - \cos(t), \sin(t))$ y en consecuencia $\|\gamma(t)'\| = \sqrt{2 - 2\cos(t)}$. Por tanto,
$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos(t)}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\, dt = 8.$$

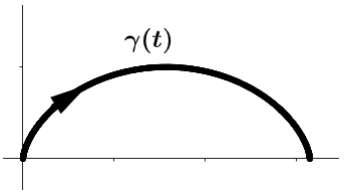

Figura 1.1.5: Curva cicloide

■

1.2 Integrales de línea

A partir de ahora, si no se dice lo contrario, vamos a restringirnos al plano y espacio, es decir, $N = 2, 3$. Empezaremos dando la noción de integrales sobre campos escalares y a continuación sobre campos vectoriales.

1.2.1 Integrales de línea de campos escalares

Este tipo de integrales también se denomina en la literatura "integrales de trayectorias".

Definición 1.2.1 Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, diremos que una aplicación f es un campo escalar sobre A si $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Esto es, para cada $(x, y, z) \in A$ le hace corresponder un valor real (o escalar) $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$.

■ **Ejemplo 1.5** Ejemplos más usuales de campos escalares en la física:
1. La temperatura de una habitación ($N = 3$).
2. La densidad de una plancha metálica no homogénea ($N = 2$).

■

Definición 1.2.2 Dado $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^N$ un camino regular y $f:A\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ un campo escalar tal que $\gamma(t)\subset A$ y $f\circ\gamma$ una aplicación continua en $[a,b]$. Entonces se define la integral de línea de f sobre γ como

$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt.$$

Observación 1.2.1

1. La notación es también válida con diferencial dl. Es decir, $\int_\gamma f\,dl$.
2. Obsérvese que si $f(x,y,z)=1$, entonces $\int_\gamma f=\int_\gamma 1\,dl=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,dt=l(\gamma)$. Que es coherente con las integrales dobles y triples para el cálculo de áreas y volúmenes.
3. Para el caso particular $f(x,y)=1+x^2+y^2$ y $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$ con $t\in[0,2\pi]$ ¿cuál sería la interpretación geométrica de $\int_\gamma f$?

Ejercicio 1.6 Sea $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2$, con γ_i continuos. Demuestra que

$$\int_\gamma f=\int_{\gamma_1} f+\int_{\gamma_2} f.$$

■

■ **Ejemplo 1.6**

1. $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$ con $t\in[0,2\pi]$, $f(x,y)=1+x^2+y^2$. Entonces,

$$\int_\gamma f=\int_0^{2\pi}2\,dt=4\pi.$$

2. $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t),t)$, con $t\in[0,2\pi]$ y $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,

$$\int_\gamma f=\int_0^{2\pi}(1+t^2)\sqrt{2}\,dt=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3+4\pi^2).$$

3. Si γ es un alambre y $f(x,y)$ es su densidad (kg/m), entonces $\int_\gamma f$ es la masa total del alambre.
4. Para el mismo alambre del ejemplo anterior, si $g(x,y)$ es su temperatura, entonces $\frac{\int_\gamma g}{l(\gamma)}$ es la temperatura media del alambre.

■

1.2.2 Caminos equivalentes

Veamos el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 1.7** Dado $f(x,y)=x^2+y^2$, $\int_\gamma f$ tiene el mismo valor para las siguientes curvas:

1. $\gamma_1(t)=(\cos(t),\sin(t)),\ t\in[0,\pi]$.
2. $\gamma_2(t)=(\cos(2t),\sin(2t)),\ t\in[0,\pi/2]$.
3. $\gamma_3(t)=\gamma_1^{-1}(t)$. Es decir, $\gamma_3(t)=(\cos(\pi-t),\sin(\pi-t))=(-\cos(t),\sin(t)),\ t\in[0,\pi]$.

■

Definición 1.2.3 Dados $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2]$ dos intervalos reales. Diremos que la aplicación $p : I_1 \to I_2$ es una parametrización si es biyectiva y $\mathscr{C}^1(I_1)$.

Lema 1.2.2 Toda parametrización envía extremos de I_1 a extremos de I_2. Es decir, o bien, $p(a_1) = a_2$ y $p(b_1) = b_2$, o bien, $p(a_1) = b_2$ y $p(b_1) = a_2$.

Demostración. Se realizará de dos formas.
Forma 1: Por contrarrecíproco, supongamos que p no conserva extremos. Es decir, o bien, $p(a_1) \in (a_2, b_2)$, o bien, $p(b_1) \in (a_2, b_2)$. Sin perder generalidad, supongamos la primera:

$$c := p(a_1) \in (a_2, b_2).$$

Al ser p inyectiva implica que es monótona, entonces:

- Si p es creciente, se tiene que $p(t) \geq c, \forall t \in [a_1, b_1]$. Es decir, no existe $p^{-1}(t)$ para $t \in [a_2, c)$. Esto es, no es sobreyectiva y contradice que la parametrización es biyectiva.

- Si p es decreciente, se tiene que $p(t) \leq c, \forall t \in [a_1, b_1]$. Es decir, no existe $p^{-1}(t)$ para $t \in (c, b_2]$. Esto es, no es sobreyectiva y contradice que la parametrización es biyectiva.

Por tanto, se concluye que p sí conserva extremos.
Forma 2: Supongamos que $p(a_1) < p(b_1)$ (p creciente) y que p no conserva extremos. Sin perder generalidad suponemos que $p(a_1) \in (a_2, b_2)$. Como p es sobreyectiva, existe $x \in (a_1, b_1)$ tal que $p(x) < p(a_1) < p(b_1)$.
Para p decreciente se argumenta de la misma forma. Aplicamos el Teorema del Valor Intermedio (Teorema 1.2.3) en el intervalo $[x, b_1]$ y se tiene que existe un $c \in (x, b_1)$ (en particular, $c > a_1$) tal que $p(c) = p(a_1)$. Lo cual contradice que p es inyectiva. ■

Teorema 1.2.3 — Teorema del Valor Intermedio. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, para cada $f(a) < y < f(b)$, existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = y$.

Ejercicio 1.7 ¿En qué momento de la demostración del lema anterior se usa que la parametrización es $\mathscr{C}^1(I_1)$? ■

Definición 1.2.4 Diremos que una parametrización conserva la orientación si $p(a_1) = a_2$ y $p(b_1) = b_2$. En caso contrario, diremos que invierte la orientación.

Observación 1.2.4 Si una parametrización p conserva la orientación, implica que p es creciente. Es decir, $p'(t) \geq 0$ para todo $t \in [a_1, b_1]$. De forma análoga, si invierte la orientación, se tiene que p es decreciente y $p'(t) \leq 0$ para todo $t \in [a_1, b_1]$.

Definición 1.2.5 Sean dos curvas $\gamma_1(t)$ con $t \in [a_1, b_1]$ y $\gamma_2(t)$ con $t \in [a_2, b_2]$. Diremos que que son curvas equivalentes, $\gamma_1 \approx \gamma_2$, si existe una parametrización $p : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ tal que $\gamma_1(t) = \gamma_2(p(t)), t \in [a_1, b_1]$.

Ejercicio 1.8 Demuestra que si $p'(t) \neq 0$, entonces $\gamma_1 \approx \gamma_2$ es una relación de equivalencia. Es decir, es simétrica, reflexiva y transitiva. ■

■ **Ejemplo 1.8** (Curvas equivalentes)

1. $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0,\pi]$ y $\gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t)), t \in [0,\pi/2]$. En efecto, basta tomar $p : [0,\pi] \to [0,\pi/2]$ definido como $p(t) = t/2$. Obsérvese que p es creciente y por tanto, la parametrización conserva la orientación.

2. $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0,\pi]$ y $\gamma_3(t) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t)) = (-\cos(t), \sin(t)), t \in [0,\pi]$. En efecto, basta tomar $p : [0,\pi] \to [0,\pi]$ definido como $p(t) = \pi - t$. Obsérvese que p es decreciente y por tanto, la parametrización invierte la orientación.

■

Veamos a continuación que las integrales de línea sobre campos escalares no se ven afectadas por parametrizaciones.

Proposición 1.2.5 Sean γ_1 y γ_2 dos curvas regulares y equivalentes, $\gamma_1 \approx \gamma_2$. Considérese f como en la Definición 1.2.2 para $\gamma = \gamma_1$. Entonces,

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Demostración. Sean $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^N$ y $\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^N$. Como $\gamma_1 \approx \gamma_2$, entonces existe una parametrización $p : [a_1,b_1] \to [a_2,b_2]$ tal que $\gamma_1(t) = \gamma_2(p(t))$, $t \in [a_1,b_1]$. Calculemos la primera integral:

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\| \, dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(p(t))) \, \|\gamma_2'(p(t)) \, p'(t)\| \, dt$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(p(t))) \, \|\gamma_2'(p(t))\| \, |p'(t)| \, dt.$$

Distingamos a hora dos casos:

Caso 1: la parametrización conserva la orientación. En este caso $p'(t) \geq 0$ y por tanto, nos quedaría,

$$= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(p(t))) \, \|\gamma_2'(p(t))\| \, p'(t) \, dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s)) \|\gamma_2'(s)\| \, ds = \int_{\gamma_2} f,$$

habiendo realizado el cambio de variable $s = p(t)$.

Caso 2: la parametrización invierte la orientación. En este caso $p'(t) \leq 0$ y por tanto, nos quedaría,

$$= -\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(p(t))) \, \|\gamma_2'(p(t))\| \, p'(t) \, dt = -\int_{b_2}^{a_2} f(\gamma_2(s)) \|\gamma_2'(s)\| \, ds = \int_{\gamma_2} f,$$

debido a que $p(a_1) = b_2$ y $p(b_1) = a_2$. ■

Si se considera la parametrización $p : [a,b] \to [a,b]$ definida como

$$p(t) = a + b - t,$$

invierte la orientación, además, dado $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, se tiene que

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(a + b - t) = \gamma(p(t)).$$

Por tanto, dado un campo escalar continuo $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tal que $\gamma([a,b]) \subset A$, obtenemos por la Proposición 1.2.5 que

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma^{-1}} f.$$

Observación 1.2.6 Aunque la parametrizacion invierta la orientación, esto no afecta al valor de la integral de línea. Más adelante veremos que esta situación no se da en el caso de integrales en líneas en campos vectoriales.

En el siguiente resultado, se manifiesta que dada una curva podemos reescalarla a otra curva equivalente con otro intervalo arbitrario.

Lema 1.2.7 Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ (regular a trozos) y $[c,d] \subset \mathbb{R}$ un intervalo arbitrario. Entonces, existe $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ (regular a trozos) tal que

$$\tilde{\gamma} \approx \gamma.$$

Demostración. Basta definir la parametrización $p : [c,d] \to [a,b]$ definida como

$$p(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{ad-bc}{d-c},$$

donde $p(c) = a$ y $p(d) = b$.
De esta manera, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(p(t))$ para todo $t \in [c,d]$. ■

Corolario 1.2.8 Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ (regular a trozos) y $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo, tal que $\gamma([a,b]) \subset A$. Entonces, para todo intervalo $[c,d] \subset \mathbb{R}$ existe $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ (regular a trozos) tal que

$$\int_{\gamma} f = \int_{\tilde{\gamma}} f.$$

1.2.3 Integrales de línea sobre campos vectoriales

Definición 1.2.6 Diremos campo vectorial a toda aplicación $F : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^N$, siendo A un conjunto abierto no vacío. Es decir,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, F_N(x_1, x_2, \ldots, x_m)),$$

donde cada $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ es un campo escalar: $A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Observación 1.2.9

1. Durante el manuscrito se tomará $N = m = 2, 3$. Y las componentes se escribirán a menudo como
$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$
2. En general los campos vectoriales se denotan en mayúscula y los campos escalares en minúscula.
3. A veces, para enfatizar que es un campo vectorial se suele denotar como $\vec{F}$.

■ **Ejemplo 1.9** Algunos ejemplos físicos de campos vectoriales:

1. Campo gravitatorio creado por una masa M centrada en el origen ($N=3$):

$$\vec{g}(x,y,z) = \frac{-GM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

donde G es la constante de gravitación universal ($6{,}674\cdot 10^{-11} Nm^2/Kg^2$). A menudo, se suele escribir de forma radial, es decir

$$\vec{g}(r) = \frac{-GM}{|r|^2}\vec{u}_r,$$

donde $r=(x,y,z)$ y $\vec{u}_r = r/|r|$ es el vector unitario central. Así pues, la fuerza que se ejerce entre dos masas también es un campo vectorial $\vec{F} = m\vec{g}$.

2. Campo electroestático creado por una carga Q centrada en el origen ($N=3$):

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{KQ}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

siendo $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ la constante dieléctrica o de Coulomb cuyo valor es aproximadamente $9\cdot 10^9 Nm^2/C^2$. Al igual que el campo gravitatorio también se suele escribir de forma radial:

$$\vec{E}(r) = \frac{KQ}{|r|^2}\vec{u}_r,$$

y la fuerza eléctrica entre dos cargas es un campo vectorial: $\vec{F} = q\vec{E}$.

3. Velocidad de un fluido que se expande ($N=2$).

■

Definición 1.2.7 Diremos que un campo vectorial $F=(F_1,F_2,\ldots,F_N)$ es continuo si cada componente $F_i : A\subset\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es continuo.

A continuación definiremos el concepto de integral de línea para campos vectoriales.

Definición 1.2.8 Sea $F : A\subset\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo y $\gamma \in \mathscr{C}^1([a,b])$ tal que $\gamma([a,b])\subset A$. Entonces, definimos la integral de línea del campo vectorial F sobre la curva γ como:

$$\int_\gamma \vec{F} := \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt.$$

Observación 1.2.10

1. De la misma forma, se puede definir la integral de línea de campos vectoriales para el caso de $N=2$.
2. Si pensamos F como la fuerza a la que está sometido un móvil al recorrer una trayectoria γ, entonces $\int_\gamma \vec{F}$ es el trabajo realizado.
3. Para definir la integral de línea de campos vectoriales es suficiente que γ sea regular a trozos.
4. En los libros de física suelen escribir $\vec{F} = F_1\vec{i}+F_2\vec{j}+F_3\vec{k}$ y $\int_\gamma \vec{F}$ como

$$\int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz.$$

■ **Ejemplo 1.10** Cálculo de integrales de línea sobre campos vectoriales:

1. $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Entonces,

$$\int_\gamma \vec{F} = 2\pi^2.$$

2. $\gamma(t) = (t, t^2, 1)$ con $t \in [0,1]$ y $F(x,y,z) = (x^2, xy, 1)$. Entonces,

$$\int_\gamma x^2\,dx + xy\,dy + dz = \frac{11}{15}.$$

■

Ejercicio 1.9 Comprueba los siguientes resultados:

1.
$$\int_\gamma \cos(z)\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2},$$
siendo $\gamma(t) = (1, t, e^t)$ con $t \in [0,2]$.

2.
$$\int_\gamma \sin(z)\,dx + \cos(z)\,dy - \sqrt[3]{xy}\,dz = -\frac{1}{2},$$
siendo $\gamma(t) = (\cos^3\theta, \sin^3\theta, \theta)$ con $\theta \in [0, \frac{7\pi}{2}]$.

■

1.2.4 Curvas equivalentes en integrales de línea sobre campos vectoriales

Proposición 1.2.11 Sean γ_1 y γ_2 dos curvas regulares a trozos y equivalentes ($\gamma_1 \approx \gamma_2$) y F un campo vectorial como en la Definición 1.2.8. Entonces,

- Si tienen la misma orientación
$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$
- Si tienen la orientación invertida
$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = -\int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

Observación 1.2.12 Obsérvese que, a diferencia de los campos escalares, el signo de la integral cambia si la parametrización invierte la orientación.

Demostración. La demostración es prácticamente igual que la Proposición 1.2.5 hasta llegar al momento de obtener

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{a_1}^{b_1} F(\gamma_2(p(t))) \cdot \gamma_2'(p(t))\, p'(t)\,dt.$$

Realizando el cambio de variable $s = p(t)$ se obtiene el resultado directo en caso de conservarse la orientación. En el caso de invertirse las orientaciones, es decir, $p(a_1) = b_2$ y $p(b_1) = a_2$, obtendríamos

$$\int_{b_2}^{a_2} F(\gamma_2(s)) \cdot \gamma_2'(s)\,ds = -\int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

■

1.2.5 Gradiente de un campo escalar. Campos conservativos.

Definición 1.2.9 Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ un campo escalar $\mathscr{C}^1(A)$, definimos como el operador gradiente de f

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_N} \right), \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_N) \in A.$$

Observación 1.2.13

1. Obsérvese que el operador gradiente es un campo vectorial:
$$\nabla f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N.$$
2. A menudo se suele escribir $\vec{\nabla} f$ para recalcar que es un campo vectorial.

■ **Ejemplo 1.11**

1. Dado $f(x,y) = x\cos(y)$, entonces $\nabla f(x,y) = (\cos(y), -x\sin(y))$.
2. Dado $g(x,y,z) = x^2yz^3$, entonces $\nabla g(x,y,z) = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$. ■

Dado f un campo escalar $\mathscr{C}^1$. Denotemos como F a ∇f (ya que es un campo vectorial). Entonces se tiene lo siguiente:

$$\int_\gamma F = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)'\, dt = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)'\, dt$$

(véase el Ejercicio 1.10)

$$= \int_a^b (f(\gamma(t)))'\, dt = |f(\gamma(t))|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \tag{1.1}$$

Ejercicio 1.10 Demuestra que $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma(t)' = (f(\gamma(t)))'$. ■

■ **Ejemplo 1.12** Dado $\gamma = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Sea $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$. Entonces, $\nabla f(x,y,z) = (x,y,z)$. Así pues, si llamamos al campo vectorial $F(x,y,z) = (x,y,z)$, se tiene que

$$\int_\gamma F = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1,0,2\pi) - f(1,0,0) = 1/2 + 4\pi^2/2 - 1/2 = 2\pi^2.$$

Compárese este resultado con el resultado 1 de Ejemplo 1.10. ■

De esta manera, de forma natural nos llega la siguiente definición.

Definición 1.2.10 Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, diremos que un campo vectorial continuo $F : A \to \mathbb{R}^N$ es conservativo, si y solo si, existe un campo escalar con derivadas parciales continuas $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$ ($\vec{F} = \vec{\nabla} f$). Por otro lado, diremos que la función f es un potencial del campo vectorial F.

Observación 1.2.14

1. Si f es el potencial, también lo será $f + constante$. Por tanto, el potencial no es único.
2. Si F es conservativo y f su potencial, entonces $\int_\gamma F = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. Esto es, la integral NO depende de la trayectoria γ, sino de los puntos inicial $\gamma(a)$ y final $\gamma(b)$ de la curva.
3. Si F es conservativo y γ cerrada ($\gamma(a) = \gamma(b)$) entonces $\int_\gamma F = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$.

■ **Ejemplo 1.13** Sea el campo vectorial $F(x,y) = (2x,y)$ y $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, \pi/2]$. Calculamos primero $\int_\gamma F$ por definición:

$$\int_0^{\pi/2} (2\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t))\, dt = -\int_0^{\pi/2} \sin(t)\cos(t)\, dt = \frac{1}{2}\cos^2(t)\Big|_0^{\pi/2} = -1/2.$$

Por otro lado, obsérvese que F es un campo conservativo, ya que dado el campo escalar $f(x,y) = x^2 + y^2/2$, se tiene que $\nabla f = F$. Así pues,

$$\int_\gamma F = f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0)) = f(0,1) - f(1,0) = 1/2 - 1 = -1/2.$$

■

Ejercicio 1.11 Demuestra que tanto el campo gravitatorio como el campo eléctrico son conservativos. Para ello calcula su potencial (gravitatorio y eléctrico). ■

Ejercicio 1.12 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0) \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido como

$$F(x,y,z) = (3x^2 + 3y^2 z\sin(xz), ay\cos(xz) + bz, 3xy^2\sin(xz) + 5y).$$

1. Calcula los valores de a y b par que el campo $\vec{F}$ sea conservativo y calcula su potencial. (Sol. $a = -6$, $b = 5$; $f(x,y,z) = x^3 - 3y^2\cos(xz) + 5zy$).
2. Para los valores de a y b obtenidos, calcula $\int_\gamma \vec{F}$ siendo $\gamma(t) = (1-2t, 1, \pi t)$ con $t \in [0,1]$. (Sol. $4 + 5\pi$).

■

Ejercicio 1.13 Sea $a > 0$. Se considera el campo vectorial $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido como

$$F(x,y) = \left(2x + \frac{a}{x+y^2}, \frac{2y}{x+y^2}\right),$$

siendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 > 0\}$.

1. Calcula el valor de a para que el campo $\vec{F}$ sea conservativo. (Sol. $a = 1$).
2. Para dicho valor de a, calcula la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de todos los arcos de parábola que unen los puntos $(1,0)$ y $(4,0)$ y con eje de simetría paralelo al eje OY. (Sol. $15 + \ln 4$).

■

Ejercicio 1.14 Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido como

$$\vec{F} = (2xy + z^3, x^2, 3xz^2).$$

Demuestra que

$$\int_\gamma \vec{F}\, dl = 0,$$

para todo γ, camino (diferenciable) con origen el punto (2,1,1) y final el punto (1,5,1). ■

Veamos que en ciertas regiones del espacio euclídeo el recíproco de la afirmación 3 de Observación 1.2.14 también es cierto. Es decir, de forma coloquial: *si para todo camino cerrado la integral sobre un campo vectorial es cero, entonces el campo vectorial es conservativo.* Para ello vamos a recordar algunas nociones de topología.

Definición 1.2.11 Sea (X,τ) un espacio topológico, diremos que $M \subset X$ es un conjunto conexo, si dados $A,B \in \tau$ no vacíos, tal que $M \subset A \cup B$ y $A \cap B \cap M = \emptyset$, entonces o bien $M \subset A$, o bien, $M \subset B$.

Intuitivamente, un conjunto conexo es el que no se puede partir en dos trozos.

Ejemplo 1.14

- Conjuntos conexos: intervalo en $\mathbb{R}$, esfera en $\mathbb{R}^2$, toro en $\mathbb{R}^3$, punto de $\mathbb{R}^N$, el complementario de un punto en $\mathbb{R}^2$.
- Conjuntos disconexos: dos esferas en $\mathbb{R}^2$, dos intervalos disjuntos en $\mathbb{R}$, el complementario de un punto en $\mathbb{R}$.

■

Definición 1.2.12 Diremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio si es abierto y conexo.

Veamos ahora la condición de arco-conexo que es un poco más exigente que ser conexo.

Definición 1.2.13 Dado (X,τ) un espacio topológico, diremos que un conjunto M contenido en X, es un conjunto arco-conexo (o conexos por arcos), si para cualesquiera $x_1, x_2 \in M$, se tiene un camino contenido en M que los conecta. Es decir, existe $\gamma : [a,b] \to M$ (regular a trozos) tal que $\gamma(a) = x_1$ y $\gamma(b) = x_2$.

La conexion por arcos es una condición más fuerte que la conexión topológica.

Ejercicio 1.15 Comprueba los siguientes conceptos topológicos:

1. Demuestra que arco-conexo implica conexo.
2. El recíproco no es cierto. Para ello encuentra un contra-ejemplo.
3. Demuestra que todo dominio es arco-conexo.

■

Teorema 1.2.15 Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio y $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ un campo vectorial continuo. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Para todo $\gamma \subset \Omega$ camino regular y cerrado se tiene que

$$\int_\gamma \vec{F} = 0.$$

(ii) Para todo γ_1, γ_2, caminos regulares que coinciden sus extremos ($\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$; $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$). Se tiene que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

(iii) $\vec{F}$ es un campo conservativo.

Demostración.

- $\underline{(i) \to (ii)}$: Sean γ_1, γ_2, caminos regulares que coinciden en sus extremos ($\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$; $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$). Consideremos γ_2^{-1} el camino inverso de γ_2 (es decir, $\gamma_2^{-1}(t) = \gamma_2(a+b-t)$). Así pues, si definimos $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^{-1}$, es un camino cerrado y por tanto,

$$0 = \int_\gamma \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2^{-1}} \vec{F}.$$

Por otro lado, por la Proposición 1.2.11 se tiene que $\int_{\gamma_2^{-1}} \vec{F} = -\int_{\gamma_2} \vec{F}$. De lo que se deduce de la igualdad anterior que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

- $\underline{(ii) \to (iii)}$: Fijado $P \in \Omega$, se define para todo $x \in \Omega$ el camino γ_x que va desde P a x y tal que $\gamma_x \subset \Omega$ (esto es posible al ser Ω un dominio). A continuación definimos el campo escalar $f : \Omega \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) := \int_{\gamma_x} \vec{F}.$$

Obsérvese que f está bien definida por (ii), en efecto, diferentes caminos que lleven de P a x tienen el mismo valor de integral. Por último, veamos que f es el potencial de $\vec{F}$. Esto es, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ y $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Para ello, basta demostrar que $\forall k = 1, \ldots, N$ se tiene que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+he_k) - f(x)}{h} = F_k(x), \tag{1.2}$$

siendo $e_k = (0, \ldots, \overset{k)}{1}, \ldots, 0)$ y $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_k, \ldots, F_N)$. En efecto, ya que de esta manera tendríamos que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ y son continuas al ser F_k continuo, por tanto, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ y $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Para demostrar (1.2) se tiene en cuenta que por definición de f,

$$f(x+he_k) = \int_{\gamma_{x+he_k}} \vec{F}.$$

Por tanto, por (ii), como no depende del camino tomado, definimos

$$\gamma_{x+he_k} = \gamma_x \cup \gamma_{[x,x+he_k]}$$

siendo $\gamma_{[x,x+he_k]} = (1-t)x + t(x+he_k) = x + the_k$, con $t \in [0,1]$ (el segmento que une x con $x+he_k$, que está contenido en Ω para h suficientemente pequeño, al ser Ω un abierto). Así pues,

$$f(x+he_k) = \int_{\gamma_{x+he_k}} \vec{F} = \int_{\gamma_x} \vec{F} + \int_{\gamma_{[x,x+he_k]}} \vec{F}$$

$$= f(x) + \int_0^1 \vec{F}(x+the_k) \cdot he_k dt = f(x) + \int_0^1 hF_k(x+the_k)dt.$$

Usando el Teorema del Valor Intermedio para Integrales (TVII): *Dado $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$*. Se llega a que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que

$$f(x+he_k) = f(x) + hF_k(x+t_0he_k).$$

Sustituyendo en (1.2), obtenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_k)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{hF_k(x+t_0he_k)}{h}=F_k(x),$$

que es donde queríamos llegar. Nótese que en el último paso se ha usado la continuidad de F_k.

- $(iii)\to(i)$: Visto anteriormente en (1.1).

■

■ **Ejemplo 1.15** Dado el campo vectorial $F(x,y)=(x^2+xy^2,x^2y+3y^4)$, el cual está definido en todo $\mathbb{R}^2$. Es conservativo, su potencial es $f(x,y)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{3}{5}y^5+C$ (obsérvese que el potencial no es único). Entonces, aplicando el Teorema 1.2.15, se tiene que:

- Para $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$ con $t\in[0,2\pi]$, $\int_\gamma F=0$.
- Para γ el segmento que une los puntos (-3,0) y (2,-1), $\int_\gamma F=f(2,-1)-f(-3,0)=\frac{61}{15}+9=\frac{196}{15}$.

■

Para finalizar esta sección veremos que los campos conservativos en $N=2$ (y diferenciables) tienen la propiedad de que sus derivadas cruzadas coinciden. Concretamente,

Lema 1.2.16 Dado $A\subset\mathbb{R}^2$ un abierto y $F=(F_1,F_2):A\to\mathbb{R}^2$ un campo vectorial conservativo y $\mathscr{C}^1(A)$. Entonces,

$$\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y},\quad \forall(x,y)\in A.$$

Demostración. Al ser F conservativo y $\mathscr{C}^1(A)$, existirá $f:A\to\mathbb{R}$ con regularidad $\mathscr{C}^2(A)$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=F_1(x,y),\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=F_2(x,y).$$

Derivando la primera expresión respecto la variable y y la segunda respecto la variable x, se tiene

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y},\qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}.$$

Finalmente, usando el Teorema de Schwarz para el campo escalar f se obtiene la igualdad deseada. ■

En el siguiente ejemplo se muestra que el recíproco no es cierto.

■ **Ejemplo 1.16** Sea el abierto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 9\}$

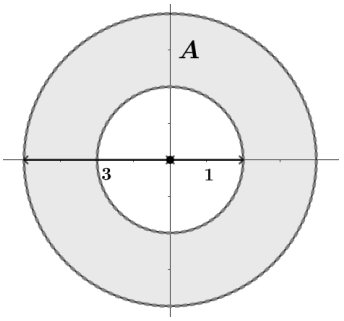

Figura 1.2.1: Ejemplo 1.16

y el campo vectorial definido como

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Claramente $F \in \mathscr{C}^1(A)$ y además,

$$\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in A.$$

En cambio, la integral de F sobre el camino cerrado $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t)), t \in [0,2\pi]$, contenido en A es

$$\int_\gamma F = 2\pi \neq 0,$$

lo que, en virtud del Teorema 1.2.15, implica que F no es conservativo. ■

En el siguiente resultado se muestra que el recíproco es cierto si restringimos la topología del abierto A. Para ello, definamos primero la noción de conjunto estrellado.

Definición 1.2.14 Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ se dice estrellado con centro $P \in A$, si para todo $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in A$ el segmento $[P,\mathbf{x}] := \{(1-t)P + t\mathbf{x} : t \in [0,1]\}$ está contenido en A.

En particular, todo conjunto convexo es estrellado con centro cualquier punto del conjunto.

Teorema 1.2.17 Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y estrellado. Consideremos el campo vectorial $F : A \to \mathbb{R}^2$ con regularidad $\mathscr{C}^1(A)$ y tal que

$$\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}, \quad \forall (x,y) \in A.$$

Entonces, F es un campo conservativo.

Para su demostración recordemos el siguiente resultado el cual establece las condiciones suficientes para pasar la derivada dentro de la integral.

Proposición 1.2.18 Sean $A \times B \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ dos conjuntos abiertos y acotados y la aplicación continua $g : \overline{A} \times \overline{B} \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ es continua para todo $(x,y) \in \overline{A} \times \overline{B}$. Entonces,

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_A g(x,y)\, dx = \int_A \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\, dx.$$

Demostración del Teorema 1.2.17. Sea $P = (P_1, P_2)$ el centro del conjunto estrellado A, así pues, el intervalo $[P, \mathbf{x}] \subset A$ para todo $\mathbf{x} = (x,y) \in A$. Consideremos el campo escalar $f : A \to \mathbb{R}$ definido para todo $\mathbf{x} \in A$ como

$$f(\mathbf{x}) := \int_{[P,\mathbf{x}]} F = \int_0^1 F([P,\mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P)\, dt,$$

siendo $[P,\mathbf{x}] := \{(1-t)P + t\mathbf{x} : t \in [0,1]\}$. Veamos que f es efectivamente el potencial de F y con ello se habrá demostrado que F es conservativo. Es decir, comprobemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y), \quad \forall (x,y) \in A.$$

Demostraremos la primera igualdad, siendo la segunda de la misma forma.
Usando la Proposición 1.2.18 se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 F([P,\mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P)\, dt \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \left(F_1([P,\mathbf{x}])\,(x - P_1) + F_2([P,\mathbf{x}])\,(y - P_2)\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial F_1([P,\mathbf{x}])}{\partial x}\, t\,(x - P_1) + F_1([P,\mathbf{x}]) + \frac{\partial F_2([P,\mathbf{x}])}{\partial x}\, t\,(y - P_2) \right) dt.
\end{aligned}$$

Usando ahora la hipótesis $\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}$ se llega a que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial F_1([P,\mathbf{x}])}{\partial x}\, t\,(x - P_1) + F_1([P,\mathbf{x}]) + \frac{\partial F_1([P,\mathbf{x}])}{\partial y}\, t\,(y - P_2) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(t \nabla F_1([P,\mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P) + F_1([P,\mathbf{x}])\right) dt \\
&= \int_0^1 t \nabla F_1([P,\mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P) dt + \int_0^1 F_1([P,\mathbf{x}])\, dt.
\end{aligned}$$

Por último, integrando la primera integral por partes:

$$u = t;\, du = dt;\, dv = \nabla F_1([P,\mathbf{x}]) \cdot (\mathbf{x} - P);\, v = F_1([P,\mathbf{x}]),$$

se llega a que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= t\, F_1([P,\mathbf{x}])]_0^1 - \int_0^1 F_1([P,\mathbf{x}])\, dt + \int_0^1 F_1([P,\mathbf{x}])\, dt \\
&= F_1(\mathbf{x}) = F_1(x,y).
\end{aligned}$$

■

1.3 Teorema de Green

En esta sección enunciaremos y demostraremos el Teorema de Green, uno de los más importantes del Análisis Vectorial, y veremos algunas de su aplicaciones más directas. Para ello recordemos que una curva de Jordan es una curva simple y cerrada. Por otro lado, diremos que una curva de Jordan en el plano está orientada positivamente si mientras se recorre dicha curva la región acotada (o interior) se encuentra a la izquierda.

■ **Ejemplo 1.17** La curva de Jordan $\gamma_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ está orientada positivamente, mientras que $\gamma_2(t) = (\cos(t), -\sin(t))$ está orientada negativamente.

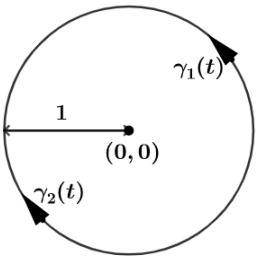

Figura 1.3.1: Ejemplo 1.17

■

Por otro lado, recuérdese el Teorema Clásico de la Curva de Jordan donde se establece que toda curva de Jordan en $\mathbb{R}^2$ divide al plano en dos componentes conexas disjuntas que tienen a la curva como frontera común. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada y se le llama exterior.

Teorema 1.3.1 — Green. Sea γ una curva de Jordan en el plano, orientada positivamente y regular (a trozos). Sea D su región interior ($\gamma = \partial^+ D$). Considérese el campo vectorial $\vec{F} : \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido como $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ y $\mathscr{C}^1(\overline{D})$. Entonces,

$$\int_\gamma \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} \right) d(x,y).$$

Observación 1.3.2

1. El Teorema de Green relaciona la integral de línea de un campo vectorial con una integral doble en $\mathbb{R}^2$ de las derivadas parciales del campo vectorial.
2. En el caso que F sea un campo conservativo la igualdad es trivial al ser las dos expresiones iguales a cero.
3. Otra notación bastante usada del Teorema de Green es: si definimos el campo vectorial como $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, entonces

$$\int_{\partial^+ D} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\int_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) d(x,y).$$

4. El Teorema de Green es un resultado en $\mathbb{R}^2$.

■ **Ejemplo 1.18** Comprobemos el Teorema de Green para el campo vectorial $F(x,y) = (y,-x)$ y D el cuadrado del plano de lados $[-1,1]\times[-1,1]$.

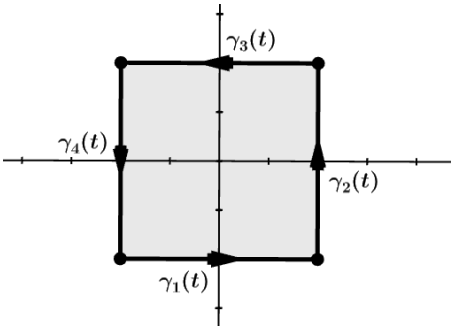

Figura 1.3.2: Ejemplo 1.18

- Cálculo de $\int_\gamma \vec{F}$: En este caso γ es el perímetro del cuadrado orientado positivamente, así pues, $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, donde para todo $t \in [-1,1]$ se tiene: $\gamma_1(t) = (t,-1)$; $\gamma_2(t) = (1,t)$ y para todo $t \in [1,-1]$ se tiene $\gamma_3(t) = (t,1)$ y $\gamma_4(t) = (-1,t)$. De esta manera,

$$\int_\gamma \vec{F} = \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k} \vec{F} = \int_{-1}^{1} (-1,-t)\cdot(1,0)dt + \int_{-1}^{1} (t,-1)\cdot(0,1)\,dt$$

$$+ \int_{1}^{-1} (1,-t)\cdot(1,0)\,dt + \int_{1}^{-1} (t,1)\cdot(0,1)\,dt =$$

$$\int_{-1}^{1} -1\,dt + \int_{-1}^{1} -1\,dt + \int_{1}^{-1} 1\,dt + \int_{1}^{-1} 1\,dt = -2-2-2-2 = \underline{-8}.$$

- Cálculo de $\int\int_D (\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y)\,d(x,y)$: Como $\partial F_2/\partial x = -1$ y $\partial F_1/\partial y = 1$, entonces:

$$\int\int_D \left(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\right) d(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -2\,dxdy = \underline{-8}.$$

En este caso, la segunda integral (la doble) ha salido más sencilla que la integral de línea. No siempre es así, a menudo la integral doble suele ser más larga. ■

Ejercicio 1.16 Comprueba el Teorema de Green:
1. $\vec{F}(x,y) = (y^2+x^3, x^4)$ y D el cuadrado del plano de lados $[0,1]\times[0,1]$. (Sol. 0).
2. $\vec{F}(x,y) = (x+y^2, x^2-y^2)$ y D la región del plano limitada por $1 \le y \le 2-x^2$. (Sol. -56/15).

■

Demostración. **Teorema de Green**

Supondremos que la región D es un rectángulo, de esta manera se está probando para cualquier región del plano, debido a que las integrales de Riemann provienen del límite de áreas de rectángulos. Para ello, sea R el rectángulo formado por los vértices: $(x_1,y_1);(x_2,y_1);(x_2,y_2);(x_1,y_2)$, donde estamos suponiendo que $x_1 < x_2$ y $y_1 < y_2$. De esta manera, $\partial^+ R = \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$, siendo:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= (t,y_1); t \in [x_1,x_2],\\
\gamma_2(t) &= (x_2,t); t \in [y_1,y_2],\\
\gamma_3(t) &= (t,y_2); t \in [x_2,x_1],\\
\gamma_4(t) &= (x_1,t); t \in [y_2,y_1].
\end{aligned}$$

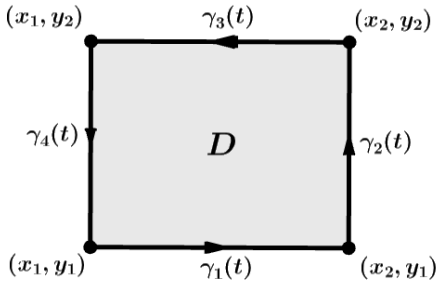

Figura 1.3.3: Teorema de Green

Así pues, si calculamos primero la primera parte de la integral doble:

$$\begin{aligned}
\int\int_R \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\, d(x,y) &= \int_{y=y_1}^{y_2}\int_{x=x_1}^{x_2} \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\, dxdy\\
&= \int_{y_1}^{y_2} \left(F_2(x_2,y) - F_2(x_1,y)\right) dy\\
&= \int_{y_1}^{y_2} F_2(x_2,y)\, dy - \int_{y_1}^{y_2} F_2(x_1,y)\, dy\\
&= \int_{y_1}^{y_2} F_2(x_2,t)\, dt - \int_{y_1}^{y_2} F_2(x_1,t)\, dt\\
&= \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}(x_2,t)\cdot(0,1)\, dt + \int_{y_2}^{y_1} \vec{F}(x_1,t)\cdot(0,1)\, dt\\
&= \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\, dt + \int_{y_2}^{y_1} \vec{F}(\gamma_4(t))\cdot\gamma_4'(t)\, dt\\
&= \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_4} \vec{F}.
\end{aligned}$$

De la misma forma, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int\int_R \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\, d(x,y) &= \int_{x=x_1}^{x_2}\int_{y=y_1}^{y_2} \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\, dydx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \left(F_1(x,y_2) - F_1(x,y_1)\right) dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} F_1(x,y_2)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} F_1(x,y_1)\, dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} F_1(t,y_2)\, dt - \int_{x_1}^{x_2} F_1(t,y_1)\, dt \\
&= -\int_{x_2}^{x_1} \vec{F}(t,y_2)\cdot(1,0)\, dt - \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(t,y_1)\cdot(1,0)\, dt \\
&= -\int_{x_2}^{x_1} \vec{F}(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)\, dt - \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\, dt \\
&= -\int_{\gamma_3} \vec{F} - \int_{\gamma_1} \vec{F}.
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\int\int_R \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}\, d(x,y) - \int\int_R \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\, d(x,y) = \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k} \vec{F} = \int_{\gamma} \vec{F},$$

lo que, concluye la demostración. ■

1.3.1 Consecuencias del Teorema de Green

Definición 1.3.1 Se dice que un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una región de Jordan si su frontera es una curva de Jordan.

Corolario 1.3.3 — Cálculo de áreas. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región de Jordan y $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial $\mathscr{C}^1(\overline{D})$ tal que $\dfrac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 1$. Entonces,

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} = Area(D).$$

Demostración. Al ser D una región de Jordan, $\partial^+ D$ es una curva de Jordan. Así pues, aplicando el Teorema de Green 2.2.6, se tiene

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\right) d(x,y) = \int\int_D 1\, d(x,y) = Area(D).$$

■

Observación 1.3.4 Hay muchos candidatos de $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ que cumplen que $\dfrac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} = 1$, algunos ejemplos:

- $\vec{F}(x,y) = (0,x)$.
- $\vec{F}(x,y) = (-y,0)$.
- $\vec{F}(x,y) = (-y/2, x/2)$.

■ **Ejemplo 1.19** Cálculo del área de una circunferencia de radio R. Para ello tomamos $\partial^+ D = \gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $\vec{F}(x,y) = (0,x)$, entonces:

$$Area(D) = \int_{\partial^+ D} \vec{F} = \int_0^{2\pi} (0, R\cos(t)) \cdot (-R\sin(t), R\cos(t)) dt = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi R^2.$$

■

Ejercicio 1.17 Calcula nuevamente el área de la circunferencia de radio R pero usando como campo vectorial: $\vec{F}(x,y) = (-y,0)$ y $\vec{F}(x,y) = (-y/2, x/2)$. ■

Corolario 1.3.5 — Teorema de Green para dominios con agujeros. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado con n agujeros $\{A_k\}_{k=1,\ldots,n}$ y el campo vectorial $\vec{F} : \overline{D} \cup \{A_k\}_{k=1,\ldots,n} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con regularidad $\mathscr{C}^1$. Consideremos como γ la frontera exterior de D y $\{\gamma_k\}_{k=1,\ldots,n}$ la frontera de los n agujeros (orientada positivamente respecto D). Entonces,

$$\int_\gamma \vec{F} + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y).$$

Demostración. Sean $A_1, \ldots, A_n$ los n agujeros, por tanto, $\partial^+ A_k = \gamma_k^{-1}$ para todo $k = 1, .., n$.

$$\begin{aligned}
\int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) &= \int\int_{D \cup_{k=1}^n A_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) \\
&\quad - \int\int_{\cup_{k=1}^n A_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) \\
= \int\int_{D \cup_{k=1}^n A_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) &- \sum_{k=1}^n \int\int_{A_k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) \\
&= \int_\gamma \vec{F} + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \vec{F}
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado la Proposición 1.2.11 y el Teorema de Green 2.2.6 en los dominios $D \cup_{k=1}^n A_k$ y A_k. ■

■ **Ejemplo 1.20** Comprobemos el Teorema de Green en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

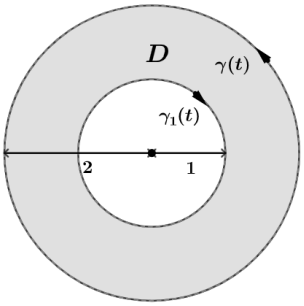

Figura 1.3.4: Ejemplo 1.20

y para el campo vectorial $F(x,y) = (y^2, x)$.

- Cálculo de $\int_\gamma F + \int_{\gamma_1} F$: $\gamma = (2\cos(t), 2\sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Por otro lado, y cuidado con la orientación, $\gamma_1 = (\cos(t), -\sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_\gamma F + \int_{\gamma_1} F &= \int_0^{2\pi} (4\sin^2 t, 2\cos(t))(-2\sin(t), 2\cos(t))\,dt \\ &\qquad + \int_0^{2\pi} (\sin^2(t), \cos(t))(-\sin(t), -\cos(t))\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-9\sin^3(t) + 3\cos^2(t))\,dt \\ &= 3\pi.\end{aligned}$$

- Cálculo de $\int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) d(x,y)$:

$$\begin{aligned}\int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) d(x,y) &= \int\int_D (1-2y)\,d(x,y) \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=1}^{2} (1 - 2\rho\sin\theta)\rho\,d\rho d\theta \\ &= 3\pi.\end{aligned}$$

■

Ejercicio 1.18 Usando el corolario del Teorema de Green para agujeros, demuestra que el área de una corona circular es $\pi(R^2 - r^2)$ $(R > r)$. ■

Teorema 1.3.6 — Teorema de Green generalizado. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y el campo vectorial $\vec{F} : \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ con regularidad $\mathscr{C}^1(\overline{D})$. Entonces,

$$\int_{\partial^+ D} \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\right) d(x,y).$$

1.4 Ejercicios resueltos

1.4.1 Longitud de curva

Ejercicio 1.19 Calcula la longitud de la curva $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), t)$ desde $(a,0,0)$ a $(0,a,\frac{\pi}{2})$. ■

Solución:

Calculemos la longitud usando la integral. Para ello, tenemos en cuenta que la derivada de la curva es $\gamma'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), 1)$ y $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2+1}$.

Observa que $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ya que el punto inicial es $(a,0,0) = \gamma(0)$ y el punto final, $\left(0,a,\frac{\pi}{2}\right) = \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$l(\gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2+1}\, dt = \frac{\sqrt{a^2+1}\pi}{2}.$$

Ejercicio 1.20 Calcula la longitud de la curva $\gamma(t) = (3, ln(t+1))$ desde $(3,0)$ a $(3, ln(2))$. ■

Solución:

Primero calculemos la derivada de la curva, $\gamma'(t) = (0, \frac{1}{t+1})$, tal que $\|\gamma'(t)\| = \frac{1}{t+1}$, siendo el punto inicial $(3,0) = \gamma(0)$ y el final $(3, ln(2)) = \gamma(1)$. Así, calculamos la longitud de curva con la siguiente integral,

$$l(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\, dt = [ln(t+1)]_0^1 = ln(2).$$

1.4.2 Integral de línea

Ejercicio 1.21 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y) = \frac{x^6}{y}$, a lo largo de la curva descrita por $y = x^3$, desde $(1,1)$ hasta $(3,27)$. ■

Solución:

La curva viene dada por $\gamma(t) = (t, t^3)$, $t \in [1,3]$, así, $\gamma'(t) = (1, 3t^2)$, $f(\gamma(t)) = t^3$, por lo tanto, la integral será

$$\int_\gamma f = \int_1^3 t^3\sqrt{1+9t^4}\, dt = \frac{365\sqrt{730}}{27} - \frac{\sqrt{10}^{3/2}}{54}.$$

Ejercicio 1.22 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y,z) = \frac{-2x\sqrt{1-x^2}}{z\sqrt{1+(1-x^2)^3}}$, a lo largo de la curva descrita por $\gamma(t) = (\sin(t), \tan(t), 4)$ para $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. ■

Solución:

La derivada de la curva viene dada por $\gamma'(t) = \left(\cos(t), \frac{1}{\cos^2(t)}, 0\right)$, $f(\gamma(t)) = \frac{-\sin(t)\cos(t)}{2\sqrt{1+\cos^6(t)}}$, por lo tanto, la integral será

$$\int_\gamma f = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(t)}{2\cos(t)}\, dt = \frac{-ln(2)}{4}.$$

Ejercicio 1.23 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y)=\frac{1}{xy^2}$, a lo largo de la curva descrita por $x=y^2$, desde $(1,1)$ hasta $(2,\sqrt{2})$. ■

Solución:

La curva viene dada por $\gamma(t)=(t,\sqrt{t})$, $t\in[1,2]$, así, $\gamma'(t)=\left(1,\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$, $f(\gamma(t))=\left(\frac{1}{t^2}\right)$, por lo tanto, la integral será

$$\int_\gamma f=\int_1^2 \frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{4t}}\,dt=\frac{5^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{9}{2^{\frac{3}{2}}}.$$

Ejercicio 1.24 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y)=xe^{y^2}$, a lo largo de la curva descrita por $y=x$, desde $(0,0)$ hasta $(3,3)$. ■

Solución:

La curva viene dada por $\gamma(t)=(t,t)$, $t\in[0,3]$, así, $\gamma'(t)=(1,1)$, $f(\gamma(t))=(te^{t^2})$, como consecuencia, la integral será

$$\int_\gamma f=\int_0^3 \sqrt{2}te^{t^2}\,dt=\frac{e^9-1}{\sqrt{2}}.$$

Ejercicio 1.25 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y)=(\sqrt{1-y^2})y$, a lo largo de la curva descrita por $y=\sin(x)$, desde $(0,0)$ hasta $(\frac{\pi}{2},1)$. ■

Solución:

La curva viene dada por $\gamma(t)=(t,\sin(t))$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, como consecuencia tenemos que $\gamma'(t)=(1,\cos(t))$ y $f(\gamma(t))=\left(\sqrt{1-\sin^2(t)}\right)\sin(t)=\cos(t)\sin(t)$, por lo tanto, la integral será

$$\int_\gamma f=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2(t)}\cos(t)\sin(t)\,dt=\frac{2^{3/2}}{3}-\frac{1}{3}.$$

Ejercicio 1.26 Calcula la integral de línea de la función $f(x,y)=(x+y)^2$, a lo largo de la curva descrita por $y=|2x|$, desde $(-2,4)$ hasta $(2,4)$. ■

Solución:

La curva γ viene dada por la unión de dos curvas $\gamma_1(t)=(t,-2t)$, $t\in[-2,0]$ y $\gamma_2(t)=(t,2t)$, $t\in[0,2]$. Así, $\gamma_1'(t)=(1,-2)$, $f(\gamma_1(t))=t^2$, y $\gamma_2'(t)=(1,2)$, $f(\gamma_2(t))=9t^2$, entonces la integral será

$$\int_\gamma f=\int_{\gamma_1} f+\int_{\gamma_2} f=\int_{-2}^0\sqrt{5}t^2\,dt+9\int_0^2\sqrt{5}t^2\,dt=\frac{8\sqrt{5}}{3}+24\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}(80)}{3}.$$

Ejercicio 1.27 Calcula la masa de un alambre con forma de hélice ($\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$) cuya función de densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia desde el eje Z al punto. Ten en cuenta que en el punto inicial, el valor de la densidad es 1. ■

Solución:

La función densidad será $f(x,y,z) = k(x^2+y^2)$, como el punto inicial es $\gamma(0) = (1,0,0)$, entonces $f(1,0,0) = 1$. Por lo tanto, $k = 1$. Podemos ahora calcular la masa del alambre, siendo $f(\gamma(t)) = (\cos^2(t) + \sin^2(t)) = 1$, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$, como

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

Ejercicio 1.28 Calcula la integral de línea para la función $\vec{F}(x,y) = \left(3xy + x\sin(x), \frac{3x^2}{2} + e^y\right)$, a lo largo de la curva que une $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$, $(-2,5)$. ■

Solución:

Como el conjunto (el interior del polígono que une los puntos dados) es un conjunto estrellado acotado y abierto, y se tiene que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3x$, tenemos que $\vec{F}$ es conservativo por el Teorema 1.2.17 y por lo tanto, sobre el camino cerrado γ que une los vértices (frontera del polígono anterior) la integral es

$$\int_\gamma \vec{F} = 0.$$

Ejercicio 1.29 Considera el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(3x^2 + \frac{y}{x}, ln(|x|) + z^2, 2zy\right)$, calcula la integral de línea para esa función, a lo largo de un camino γ, que une $(1,1,1)$ y $(1,2,2)$. ■

Solución:

Veamos si $\vec{F}$ es un campo conservativo, calculando su función potencial. Para ello, consideramos que el gradiente del potencial será $\vec{F}$, entonces, si f es la función potencial, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + \frac{y}{x},$$

por tanto,

$$f = x^3 + yln(|x|) + C(y,z).$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ln(|x|) + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = ln(|x|) + z^2,$$

por lo que $C(y,z) = z^2 y + K(z)$, así,

$$f = x^3 + yln(|x|) + z^2 y + K(z).$$

Por último,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2zy + \frac{\partial K(z)}{\partial z} = 2zy,$$

por lo que $K(z) = 0$, teniendo que la función potencial es

$$f = x^3 + yln(|x|) + z^2 y.$$

Calculamos entonces la integral de línea como

$$\int_\gamma \vec{F} = f(1,2,2) - f(1,1,1) = 7.$$

Ejercicio 1.30 Calcula la integral de línea de la función $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{-y^2}{x^2+y^2}\right)$, a lo largo de la curva más pequeña sobre la circunferencia de radio 2 que une el punto $(0,2)$ y $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. ■

Solución:
Tendremos la siguiente situación:

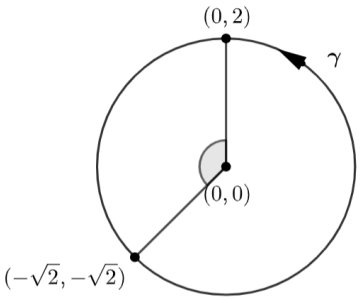

Figura 1.4.1: Ejercicio 1.30

La curva que describe esta circunferencia será $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$ para t entre los ángulos que unen los puntos del enunciado.

Igualamos los puntos a la parametrización para obtener el intervalo de t.

- $0 = 2\cos(t)$, $2 = 2\sin(t)$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$.
- $-\sqrt{2} = 2\cos(t)$, $-\sqrt{2} = 2\sin(t)$, entonces $t = \frac{5\pi}{4}$.

Teniendo en cuenta la orientación de la curva γ, el camino más corto será el que describe la curva para $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$, calculemos entonces la integral.

Siendo $\gamma'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma(t)) = \left(\cos(t)\sin(t), -\sin^2(t)\right)$, la integral de línea sería

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} -4\cos(t)\sin^2(t)\,dt = -4\left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} = 4\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\right).$$

1.4.3 Teorema de Green

Teorema de Green sin agujeros

Ejercicio 1.31 Dado D como la superficie encerrada entre $y = e^x$, $y = 1$, $x = a$, $x = b$ con $0 < a < b$, calcula la suma de las integrales de línea usando el Teorema de Green para D, con $\vec{F}(x,y) = (-\cos(x)ln(y), \sin(x))$. ■

Solución:

Consideramos el Teorema de Green para obtener la suma de las integrales de línea, que nos diría

$$\int_\gamma \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) d(x,y).$$

Donde γ sería la curva que describe nuestro recinto. La integral doble sería

$$\int_a^b \int_1^{e^x} \left(\cos(x) + \frac{\cos(x)}{y}\right) dydx = \int_a^b \cos(x) \int_1^{e^x} \left(1 + \frac{1}{y}\right) dydx = \int_a^b \cos(x)\,[y + ln(y)]_1^{e^x}\, dx$$

$$= \int_a^b \cos(x)(e^x + x - 1)\, dx = \int_a^b \cos(x)e^x\, dx + \int_a^b \cos(x)x\, dx - \int_a^b \cos(x)\, dx.$$

Que mediante el uso del método de integración por partes se queda como:

$$\int_a^b \cos(x)e^x\, dx + \int_a^b \cos(x)x\, dx - \int_a^b \cos(x)\, dx =$$

$$\left[\frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2}\right]_a^b + [x\sin(x) + \cos(x)]_a^b - [\sin(x)]_a^b.$$

Ejercicio 1.32 Dado D como la superficie encerrada entre el eje de abscisa, $x = 1$, $x = e$ y $ln(x) = y$, calcula las integrales de línea usando el Teorema de Green para D, con $\vec{F}(x,y) = (e^y, xy)$. ■

Solución:

Consideramos el Teorema de Green para obtener la suma de las integrales de línea, que nos diría

$$\int_\gamma \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) d(x,y).$$

Donde γ sería la curva que describe nuestro recinto. La integral doble sería

$$\int_1^e \int_0^{lnx} (y - e^y)\, dydx = \int_1^e \left(\frac{ln^2 x}{2} - x + 1\right) dx = \frac{3e - e^2 - 3}{2}.$$

Ejercicio 1.33 Usa el Teorema de Green para calcular la masa de un alambre cuya forma es la de la función $y = ln(x)$ comprendida entre $x = 1$, $x = e$, si la densidad en cada punto está dada por el cuadrado de su abscisa. ■

Solución:

La curva a integrar es $\gamma(t) = (t, ln(t))$ para $t \in [1,e]$ y la densidad es $f(x,y) = x^2$, por lo que podemos calcular la integral de línea como

$$\int_\gamma f = \int_1^e t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\, dt = \int_1^e t\sqrt{t^2+1}\, dt = \frac{1}{3}\left((1+e^2)^{3/2} - 2^{3/2}\right).$$

Ejercicio 1.34 Comprueba el Teorema de Green para la función $\vec{F}(x,y) = (-4y, 4x)$ en un circulo de radio a centrado en $(0,0)$. ■

Solución:

En primer lugar, calculamos las integral de línea. La curva que describe la circunferencia orientada positivamente respecto al círculo dado, es $\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma(t)) = (-4a\sin(t), 4a\cos(t))$, la integral de línea sería

$$\int_\gamma \vec{F} = \int_0^{2\pi} 4a^2\, dt = 8a^2\pi.$$

Calculamos ahora la integral doble. Como $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 4$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -4$, tenemos que, siguiendo el Teorema de Green, la integral de línea será igual a

$$\int\int_D 8\, d(x,y) = \int_0^a \int_0^{2\pi} 8\rho\, d\theta d\rho = 8a^2\pi.$$

Donde D es el círculo y donde hemos usado el cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$.

Ejercicio 1.35 Calcula el valor de la integral de línea de una elipse centrada en $(1,1)$ de ejes 4, 2, usando el Teorema de Green para la función $\vec{F}(x,y) = (e^x + 4y, 2ln(y^2 + e^y) + x)$. ■

Solución:

Calculemos entonces la integral doble de $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -3$, usando el Teorema de Green las integral de línea será igual a

$$\int\int_D -3\, d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -24\rho\, d\rho d\theta = -24\pi.$$

Donde D es el interior de la elipse dada por la ecuación $\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$, y donde usamos el cambio de coordenadas correspondiente a esa elipse, $x = 4\rho\cos(\theta) + 1$, $y = 2\rho\sin(\theta) + 1$.

Ejercicio 1.36 Comprueba el Teorema de Green para el triángulo formado por los vértices $(0,\frac{1}{2})$, $(1,0)$, $(1,2)$, para la función $\vec{F}(x,y)=(x^2y,5xy)$. ■

Solución:
Tendremos la siguiente situación:

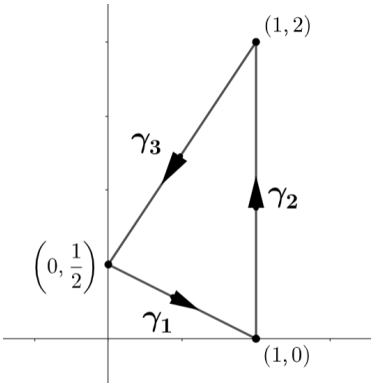

Figura 1.4.2: Ejercicio 1.36

Calculemos las integrales de línea de las trayectorias orientadas positivamente:

1. $\gamma_1(t)=\left(t,\frac{1-t}{2}\right)$, $t\in[0,1]$, $\gamma_1'(t)=\left(1,\frac{-1}{2}\right)$, $\vec{F}(\gamma_1(t))=\left(\frac{t^2-t^3}{2},\frac{5t-5t^2}{2}\right)$, la integral de línea es
$$\int_{\gamma_1}\vec{F}=\frac{-1}{6}.$$
2. $\gamma_2(t)=(1,2t)$, $t\in[0,1]$, $\gamma_2'(t)=(0,2)$, $\vec{F}(\gamma_2(t))=(2t,10t)$, la integral de línea es
$$\int_{\gamma_2}\vec{F}=10.$$
3. $\gamma_3(t)=\left(1-t,2-\frac{3t}{2}\right)$, $t\in[0,1]$, $\gamma_3'(t)=\left(-1,\frac{-3}{2}\right)$, $\vec{F}(\gamma_3(t))=\left(\frac{(1-t)^2(4-3t)}{2},\frac{5(1-t)(4-3t)}{2}\right)$, la integral de línea es
$$\int_{\gamma_3}\vec{F}=\frac{-37}{6}.$$

El total será $\frac{11}{3}$.
Calculamos ahora la integral doble.
Como $\frac{\partial F_2}{\partial x}=5y$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}=x^2$, tenemos que, siguiendo el Teorema de Green, las integrales de línea serán igual a
$$\int_0^1\int_{\frac{1-x}{2}}^{\frac{1+3x}{2}}(5y-x^2)\,dydx=\int_0^1(5x^2+5x-2x^3)\,dx=\frac{11}{3}.$$

Ejercicio 1.37 Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}(x,y) = (y, 2x^2)$, a lo largo del triángulo formado por los vértices $(-1,1)$, $(0,0)$, $(2,0)$.

■

Solución:

El triángulo se puede representar como:

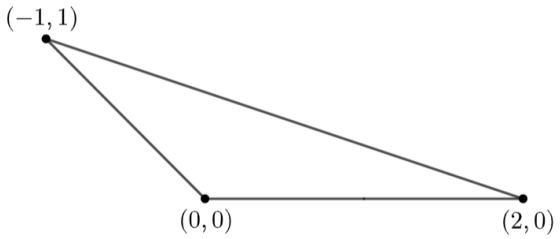

Figura 1.4.3: Ejercicio 1.37

Podemos usar el Teorema de Green para obtener las integrales de línea de la función,

$$\int_\gamma \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \int\int_D (4x-1)\, d(x,y).$$

Donde D será nuestro triángulo. Para calcular la integral doble identifiquemos las tres rectas que forman su borde.

1. Recta que une $(0,0)$ y $(2,0)$.
$$y = 0.$$
2. Recta que une $(-1,1)$ y $(2,0)$.
$$y = \frac{2-x}{3}.$$
3. Recta que une $(-1,1)$ y $(0,0)$.
$$y = -x.$$

Así, la integral doble quedará como:

$$\int\int_D (4x-1)\, d(x,y) = \int_{-1}^{0} \int_{-x}^{\frac{2-x}{3}} (4x-1)\, dydx + \int_0^2 \int_0^{\frac{2-x}{3}} (4x-1)\, dydx$$

$$= \int_{-1}^{0} (4x-1) \left(\frac{2+2x}{3} \right) dx + \int_0^2 (4x-1) \left(\frac{2-x}{3} \right) dx = \frac{-7}{9} + \frac{10}{9} = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 1.38 Usa el Teorema de Green para calcular el área del polígono que une los puntos $(0,0)$, $(3,1)$, $(5,4)$, $(0,5)$. ■

Solución
El polígono en cuestión sería:

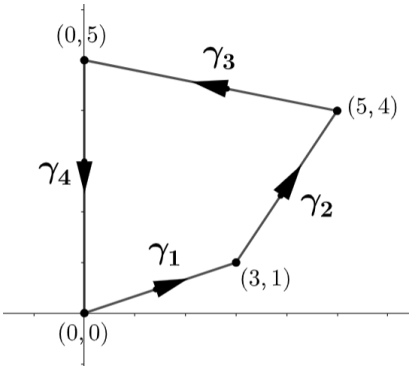

Figura 1.4.4: Ejercicio 1.38

Consideremos una función de manera que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$, así, el Teorema de Green nos dará el valor del área en función de las integrales de línea. Sea esta función $\vec{F}(x,y) = (0,x)$, calculemos las integrales de línea del polígono orientadas positivamente:

1. $\gamma_1(t) = (3t,t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_1'(t) = (3,1)$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0,3t)$, así, la integral de línea será
$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \frac{3}{2}.$$
2. $\gamma_2(t) = (3+2t, 1+3t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2'(t) = (2,3)$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0,3+2t)$, por lo tanto, la integral de línea será
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = 12.$$
3. $\gamma_3(t) = (5-5t, 4+t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_3'(t) = (-5,1)$, $\vec{F}(\gamma_3(t)) = (0,5-5t)$, la integral de línea será
$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \frac{5}{2}.$$
4. $\gamma_4(t) = (0,5-5t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_4'(t) = (0,-5)$, $\vec{F}(\gamma_4(t)) = (0,0)$, así, la integral de línea será
$$\int_{\gamma_4} \vec{F} = 0.$$

Por lo tanto, el valor total del área será 16.

Ejercicio 1.39 Usa el Teorema de Green para calcular el área de la mitad superior de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. ■

Solución:
Nos piden calcular el área de:

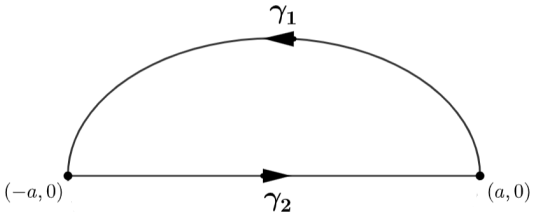

Figura 1.4.5: Ejercicio 1.39

Consideramos la curva que describe la parte superior del borde de la elipse, γ_1 y la que une $(-a,0)$ a $(a,0)$, γ_2. Realizaremos la integral de línea para una función $\vec{F}(x,y)$, que satisfaga $\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}=1$, como $\vec{F}(x,y)=(0,x)$. Entonces,

1. $\gamma_1(t)=(a\cos(t),b\sin(t))$, $t\in[0,\pi]$, $\gamma_1'(t)=(-a\sin(t),b\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_1(t))=(0,a\cos(t))$, la integral será
$$\int_{\gamma_1}\vec{F}=\int_0^{\pi}ab\cos^2(t)\,dt=\frac{ab\pi}{2}.$$
2. $\gamma_2(t)=(-a+2at,0)$, $t\in[0,1]$, $\gamma_2'(t)=(2a,0)$, $\vec{F}(\gamma_2(t))=(0,-a+2at)$, la integral de línea queda como
$$\int_{\gamma_2}\vec{F}=0.$$

El área es $\frac{ab\pi}{2}$.

Ejercicio 1.40 Calcula el área, en el primer cuadrante, encerrada por las curvas que describen una elipse de semiejes $(2,1)$ y la circunferencia de radio 1, ambas centradas en $(0,0)$. ■

Solución
Estaríamos ante el siguiente caso:

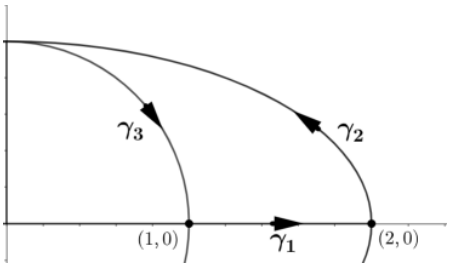

Figura 1.4.6: Ejercicio 1.40

Consideremos la función $\vec{F}(x,y)=(0,x)$ y calculemos el área a partir de las integrales de línea que describen la figura, $\gamma_1(t)$ que describe el segmento desde $(1,0)$ a $(2,0)$, $\gamma_2(t)$ que describe la parte de la elipse y $\gamma_3(t)$ que describe la circunferencia con orientación negativa.

1. $\gamma_1(t) = (t+1,0)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_1'(t) = (1,0)$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0,t+1)$. La integral de línea sería
$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = 0.$$
2. $\gamma_2(t) = (2\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\gamma_2'(t) = (-2\sin(t), \cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0, 2\cos(t))$. La integral de línea sería
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}.$$
3. $\gamma_3(t) = (\cos(t), -\sin(t))$, $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, $\gamma_3'(t) = (-\sin(t), -\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_3(t)) = (0, \cos(t))$. La integral de línea sería
$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2(t)\,dt = \frac{-\pi}{4}.$$

Así, el área será $\frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 1.41 Comprueba el Teorema de Green para la función $\vec{F}(x,y) = (3y, -x)$ en D, dado por la región, en el primer cuadrante, del círculo de centro $(0,0)$ y radio 2, que se encuentra comprendida entre $y = x$ y $y = 0$.

■

Solución:
Un dibujo del problema será:

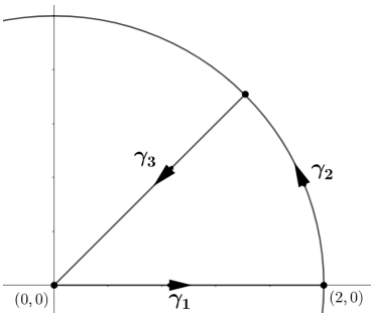

Figura 1.4.7: Ejercicio 1.41

Calcularemos las integrales de línea de las curvas orientadas positivamente respecto a la figura dada.

La frontera de nuestra figura, D, está dada por tres curvas: $\gamma_1(t)$ que une $(0,0)$ a $(2,0)$, $\gamma_2(t)$ que describe la parte de la circunferencia que va desde $(2,0)$ hasta el punto de corte de la circunferencia y la recta, y finalmente $\gamma_3(t)$ que una el punto de corte al punto $(0,0)$.

Calculemos primero el punto de corte entre la circunferencia y la recta.

La circunferencia, frontera del círculo dado, será $x^2 + y^2 = 4$, por lo que el punto de corte con la recta $y = x$, se calcula como
$$2y^2 = 4.$$
Siendo este punto de corte $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, que si tenemos en cuenta la parametrización de la circunferencia dada por $\gamma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, se alcanzará este punto de corte en el ángulo $\frac{\pi}{4}$. Así, podemos calcular las integrales de línea.

1. $\gamma_1(t) = (2t, 0)$ para $t \in [0,1]$, $\gamma_1'(t) = (2,0)$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, -2t)$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = 0.$$

2. $\gamma_2(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, con la derivada como $\gamma_2'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$ y $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (6\sin(t), -2\cos(t))$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-12\sin^2(t) - 4\cos^2(t))\, dt = 2 - 2\pi.$$

3. $\gamma_3(t) = (\sqrt{2} - \sqrt{2}t, \sqrt{2} - \sqrt{2}t)$ para $t \in [0,1]$, con derivada $\gamma_3'(t) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $\vec{F}(\gamma_3(t)) = (3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t, -\sqrt{2} + \sqrt{2}t)$, obteniendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \int_0^1 (4t - 4)\, dt = -2.$$

Así, el total será -2π.
Calculamos ahora la integral doble, siendo $\frac{\partial F_2}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 3$,

$$\int\int_D -4\, d(x,y) = -4 \int_0^2 \int_0^{\pi/4} \rho\, d\theta d\rho = -2\pi.$$

Queda comprobado el Teorema de Green.

Teorema de Green con agujeros

Ejercicio 1.42 Usa el Teorema de Green con agujeros para calcular el área del triángulo de vértices $(0,\frac{1}{2})$, $(1,0)$, $(1,2)$ con un agujero circular de radio $\frac{1}{8}$, centrada en $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Solución:
Estaríamos ante el siguiente caso:

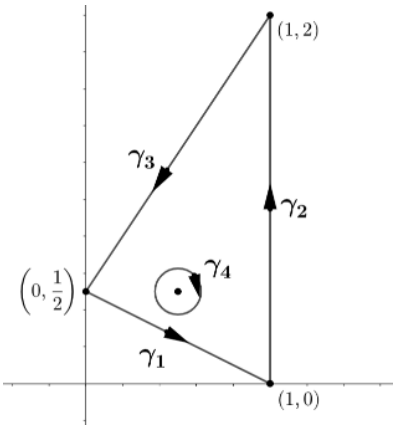

Figura 1.4.8: Ejercicio 1.42

Consideramos la función $\vec{F}(x,y) = (0,x)$ y calculamos las integrales de línea que nos darán, siguiendo el Teorema de Green, el área de la figura.

Consideramos las curvas del triángulo orientadas positivamente:

1. $\gamma_1(t) = \left(t, \frac{1-t}{2}\right)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_1'(t) = \left(1, \frac{-1}{2}\right)$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = \left(0, \frac{1-t}{2}\right)$, la integral de línea será
$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \frac{-1}{4}.$$
2. $\gamma_2(t) = (1,2t)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2'(t) = (0,2)$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0,1)$, la integral de línea será
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = 2.$$
3. $\gamma_3(t) = \left(1-t, 2-\frac{3t}{2}\right)$, $t \in [0,1]$, $\gamma_3'(t) = \left(-1, \frac{-3}{2}\right)$, $\vec{F}(\gamma_3(t)) = (0,1-t)$, la integral de línea será
$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = \frac{-3}{4}.$$

Siendo el total del área del triángulo 1.

Ahora, consideramos la circunferencia orientada positivamente respecto a nuestra figura
$$\gamma_4 = \left(\frac{1}{8}\cos(t) + \frac{1}{2}, \frac{-1}{8}\sin(t) + \frac{1}{2}\right)$$
para $t \in [0,2\pi]$. Así, $\gamma_4'(t) = \left(\frac{-1}{8}\sin(t), \frac{-1}{8}\cos(t)\right)$, $\vec{F}(\gamma_4(t)) = \left(0, \frac{1}{8}\cos(t) + \frac{1}{2}\right)$, por lo tanto,
$$\int_{\gamma_4} \vec{F} = \frac{1}{64}\int_0^{2\pi} -\cos^2(t)\,dt - \frac{1}{16}\int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt = \frac{-\pi}{64}.$$

Así, el área de la figura será $\int_{\gamma_1}\vec{F} + \int_{\gamma_2}\vec{F} + \int_{\gamma_3}\vec{F} + \int_{\gamma_4}\vec{F} = 1 - \frac{\pi}{64}$.

Ejercicio 1.43 Usa el Teorema de Green para calcular la suma de integrales de línea sobre la trayectoria que describe la frontera del disco $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 < x^2+y^2 < 4\}$, para $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2, x)$. ■

Solución:

Usando el Teorema de Green calculemos esa integral de línea a partir de una integral doble sobre el disco.

$$\int_{\partial D} \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \int\int_D (1-2y)\, d(x,y).$$

Usando ahora el cambio de variable $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$, tenemos que

$$\int\int_D (1-2y)\, d(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (1-2\rho\sin(\theta))\rho\, d\rho d\theta = 3\pi.$$

Ejercicio 1.44 Usa el Teorema de Green con agujeros para calcular el área de un círculo de centro $(0,0)$ y radio 4, con un orificio formado por un círculo de radio 1 centrado en $(2,0)$. ■

Solución:

Consideremos la función $\vec{F}(x,y) = (0,x)$ para calcular el área a partir de las integrales de línea según el Teorema de Green.

Podemos esbozar nuestra figura como:

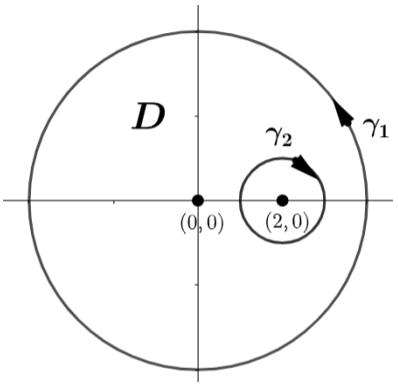

Figura 1.4.9: Ejercicio 1.44

La frontera del círculo de centro $(0,0)$ estará descrita por $x^2+y^2 = 16$, por lo tanto, la curva orientada positivamente respecto a nuestra figura será:

$$\gamma_1(t) = (4\cos(t), 4\sin(t))$$

para $t \in [0, 2\pi]$. Así, $\gamma_1'(t) = (-4\sin(t), 4\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, 4\cos(t))$,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = 16\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = 16\pi.$$

La frontera del círculo de centro $(2,0)$ estará descrita por $(x-2)^2+y^2=1$, por lo tanto, la curva orientada positivamente respecto a nuestra figura será:

$$\gamma_2(t)=(\cos(t)+2,-\sin(t))$$

para $t\in[0,2\pi]$. Como consecuencia, $\gamma_2'(t)=(-\sin(t),-\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_2(t))=(0,\cos(t)+2)$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_2}\vec{F}=-\int_0^{2\pi}\left(\cos^2(t)+2\cos(t)\right)dt=-\pi.$$

Por lo tanto, el área de nuestra figura será $\int_{\gamma_1}\vec{F}+\int_{\gamma_2}\vec{F}=15\pi$.

Ejercicio 1.45 Calcula la suma de las integrales de linea del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y)=\left(y,x\left(\frac{2y}{3}\right)^2\right),$$

sobre las curvas que forman la frontera de la corona elíptica centrada en $(a,0)$,

$$D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:36<9(x-a)^2+4y^2<72\}.$$

Solución:
La corona está formada por dos elipses.
Elipse exterior:

$$\left(\frac{x-a}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y}{3\sqrt{2}}\right)^2=1.$$

Elipse interior:

$$\left(\frac{x-a}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1.$$

Un esbozo de la figura sería.

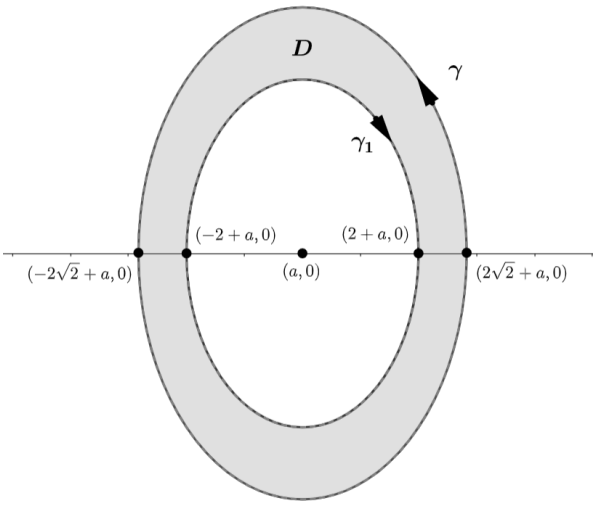

Figura 1.4.10: Ejercicio 1.45

Consideramos el Teorema de Green para obtener la suma de las integrales de línea, siendo γ la curva que describe la elipse exterior y γ_1 la curva que describe la elipse interior, ambas orientadas de forma positiva respecto a D.

$$\int_{\gamma} \vec{F} + \int_{\gamma_1} \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y).$$

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \left(\frac{2y}{3} \right)^2 - 1.$$

Calculamos la integral doble con el cambio coordenadas $x = 2\rho\cos(\theta) + a$, $y = 3\rho\sin(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [1, \sqrt{2}]$.

$$\int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} 6\rho \left(4\rho^2 \sin^2\theta - 1 \right) d\rho d\theta = 12\pi.$$

Ejercicio 1.46 Usa el Teorema de Green con agujeros para calcular el área de

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 + 2y < x^2 + y^2 < 4 + 2y\}.$$

■

Solución:
En este caso, D es una corona circular centrada en $(0,1)$,

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x^2 + (y-1)^2 < 5\}.$$

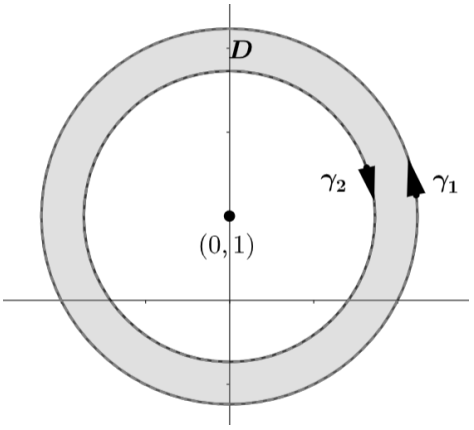

Figura 1.4.11: Ejercicio 1.46

Usando el Teorema de Green podemos obtener al área a partir de las integrales de línea. Usemos la función $\vec{F}(x,y) = (0,x)$, siendo las curvas orientadas positivamente respecto a D:

1. $\gamma_1(t) = (\sqrt{5}\cos(t), \sqrt{5}\sin(t)+1)$, $t \in [0,2\pi]$, $\gamma_1'(t) = (-\sqrt{5}\sin(t), \sqrt{5}\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, \sqrt{5}\cos(t))$, la integral de línea será
$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_0^{2\pi} 5\cos^2(t)\,dt = 5\pi.$$
2. $\gamma_2(t) = (\sqrt{3}\cos(t), -\sqrt{3}\sin(t)+1)$, $t \in [0,2\pi]$, $\gamma_2'(t) = (-\sqrt{3}\sin(t), -\sqrt{3}\cos(t))$, $\vec{F}(\gamma_2(t)) = (0, \sqrt{3}\cos(t))$, la integral de línea será
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_0^{2\pi} -3\cos^2(t)\,dt = -3\pi.$$

Así, el área total será 2π.

Ejercicio 1.47 Calcula el área de la siguiente figura usando el Teorema de Green.
La región de la corona elíptica
$$4 \leq (x-1)^2 + 2y^2 \leq 12,$$
que queda entre $y = 0$ e $y = x$, con $x \geq 1$, $y \geq 0$. ■

Solución:
La corona está formada por dos elipses.
Elipse exterior:
$$\left(\frac{x-1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1.$$
Elipse interior:
$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$
Estaríamos ante el siguiente caso:

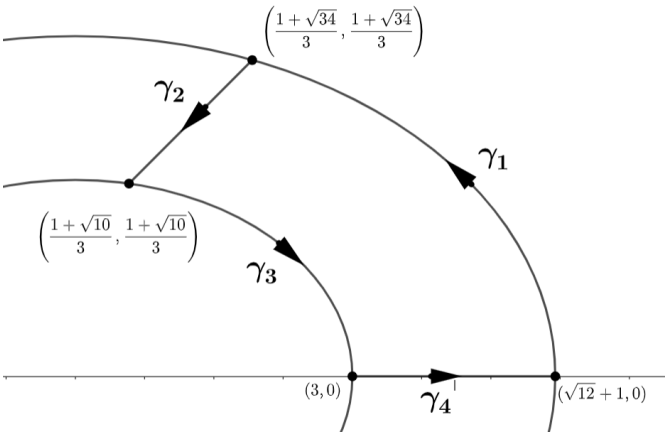

Figura 1.4.12: Ejercicio 1.47

Usamos el Teorema de Green para obtener el área, siempre que seleccionemos un $\vec{F}$ adecuado, tal que la diferencia entre las derivadas parciales cruzadas sea 1, por ejemplo $\vec{F}(x,y) = (0,x)$.

Consideramos γ_1 la curva que describe la elipse exterior entre los puntos de corte con $y = 0$ e $y = x$, γ_2 la que describe el segmento que une las dos elipses, γ_3 la curva que describe la elipse interior entre los puntos de corte con $y = x$ e $y = 0$, γ_4 la recta que une los puntos de intersección de la recta $y = 0$ y las dos elipses.

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F} + \int_{\gamma_4} \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \int\int_D 1 \, d(x,y).$$

Primero, necesitamos calcular los puntos de intersección de la recta $y = x$ con las elipses exterior e interior.

1. Punto corte con elipse interior.

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = x. \end{cases}$$

   Resolviendo $3x^2 - 2x - 3 = 0$ obtenemos el punto de corte $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3} \right)$.

2. Punto corte con elipse exterior.

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{12} + \frac{y^2}{6} = 1, \\ y = x. \end{cases}$$

   Resolviendo $3x^2 - 2x - 11 = 0$ obtenemos el punto de corte $\left(\frac{1+\sqrt{34}}{3}, \frac{1+\sqrt{34}}{3} \right)$.

Así pues, las cuatro curvas serían las siguientes.

1. La elipse exterior dada por

$$\gamma_1(t) = (\sqrt{12}\cos(t) + 1, \sqrt{6}\sin(t)) \; t \in [0, d_1].$$

   Siendo d_1 el ángulo en el que se encuentra la intersección de la elipse y la recta $y = x$. Para calcularlo, igualamos la parametrización de la elipse a la intersección, $\frac{1+\sqrt{34}}{3} = \sqrt{12}\cos(t) + 1$, $\frac{1+\sqrt{34}}{3} = \sqrt{6}\sin(t)$ con $t = d_1$ el ángulo para el que se cumple las igualdades anteriores. Así, la integral de línea con $\gamma_1'(t) = (-\sqrt{12}\sin(t), \sqrt{6}\cos(t))$ y $\vec{F}(\gamma_1(t)) = (0, \sqrt{12}\cos(t) + 1)$, será

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_0^{d_1} \left(6\sqrt{2}\cos^2(t) + \sqrt{6}\cos(t) \right) dt = \sqrt{6}\sin(d_1) + 3\sqrt{2}(d_1 + \cos(d_1)\sin(d_1)).$$

2. En cuanto a γ_2, tenemos que

$$\gamma_2(t) = \left(\frac{1+\sqrt{34}}{3} + \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right) t, \frac{1+\sqrt{34}}{3} + \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right) t \right)$$

   para $t \in [0,1]$. Entonces $\gamma_2'(t) = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3}, \frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right)$, $\vec{F}(\gamma_2) = \left(0, \frac{1+\sqrt{34}}{3} + \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right) t \right)$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} = \int_0^1 \left(\frac{(1+\sqrt{34})(\sqrt{10}-\sqrt{34})}{9} + \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}}{3} \right)^2 t \right) dt = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{34}-12}{9}.$$

3. La elipse interior dada por

$$\gamma_3^{-1}(t) = (2\cos(t)+1, \sqrt{2}\sin(t))\ t \in [0, d_2].$$

Siendo d_2 el ángulo en el que se encuentra la intersección de la elipse y la recta $y = x$. Este se obtiene, como el anterior, igualando la parametrización de la elipse a la intersección, $\frac{1+\sqrt{10}}{3} = 2\cos(t)+1$, $\frac{1+\sqrt{10}}{3} = \sqrt{2}\sin(t)$. Siendo d_2 el ángulo para el que se cumple las igualdades anteriores. Así, la integral de línea con $(\gamma_3^{-1})'(t) = (-2\sin(t), \sqrt{2}\cos(t))$ y $\vec{F}(\gamma_3^{-1}(t)) = (0, 2\cos(t)+1)$, será

$$\int_{\gamma_3} \vec{F} = -\int_{\gamma_3^{-1}} \vec{F} = -\int_0^{d_2} (2\sqrt{2}\cos^2(t) + \sqrt{2}\cos(t))\,dt = -\sqrt{2}(d_2 + \sin d_2(1+\cos d_2)).$$

4. Por último, la curva γ_4 que consiste en el segmento que une los puntos $(3,0)$ y $(\sqrt{12}+1, 0)$, es

$$\gamma_4(t) = (3 + (\sqrt{12}-2)t, 0)$$

para $t \in [0,1]$. Entonces $\gamma_4'(t) = (\sqrt{12}-2, 0)$, $\vec{F}(\gamma_4) = (0, 3+(\sqrt{12}-2)t)$, siendo la integral de línea

$$\int_{\gamma_4} \vec{F} = 0.$$

Así, el área es

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F} + \int_{\gamma_4} \vec{F} = \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_3} \vec{F}.$$

Ejercicio 1.48 Usa el Teorema de Green con agujeros para calcular el área de la figura D, el interior de un círculo de radio 2 y centro $(1,0)$, con un agujero formado por el círculo centrado en $(1,0)$, de radio 1, cortado por la recta $2x-3 = y$. ■

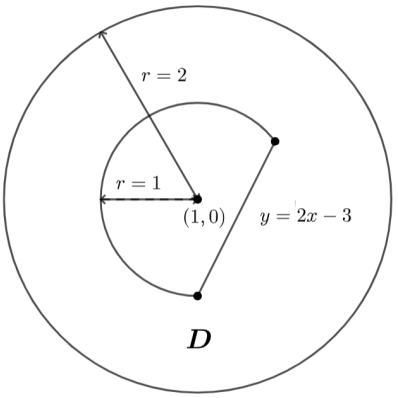

Figura 1.4.13: Enunciado del ejercicio 1.48

Solución:
Lo que obtenemos aquí es:

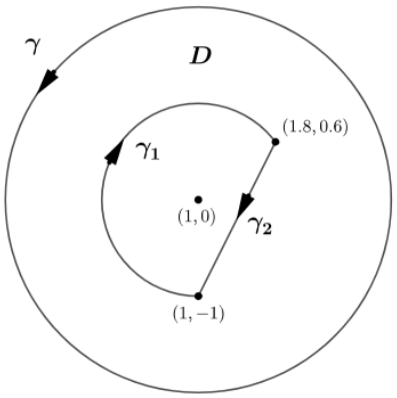

Figura 1.4.14: Ejercicio 1.48

Usando el Teorema de Green con agujeros podemos obtener el área, siempre que seleccionemos un $\vec{F}$ adecuado, tal que la resta entre las derivadas parciales es 1, por ejemplo $\vec{F}(x,y) = (0,x)$. Necesitamos tener definidas las tres curvas.

1. El circulo exterior dado por

   $$\gamma(t) = (2\cos(t)+1, 2\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$$

   tal que

   $$\gamma'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t))$$

   cuya integral de línea sería

   $$\int_0^{2\pi} (4\cos^2(t) + 2\cos(t))dt = 4\pi.$$

2. El circulo interior dado por

   $$\gamma_1(t) = (\cos(t)+1, -\sin(t))$$

   donde t se encuentra entre los ángulos que describen los puntos de intersección de la recta y el círculo de radio 1. Se calcularían sabiendo que el circulo interior está dado por $(x-1)^2+y^2 = 1$ y la recta sería $y = 2x-3$, igualando y y despejando tenemos que

   $$5y^2 + 2y - 3 = 0.$$

   Obteniendo los puntos de corte $(1,-1)$ y $(1,8,0,6)$. Así, tendría que cumplirse que para el primer punto, $(1,-1)$, $0 = \cos(t)$, $1 = \sin(t)$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$ y que para el segundo punto $(1{,}8{,}0{,}6)$, $0,8 = \cos(t)$, $0,6 = \sin(t)$, sea $t = d$ el que cumple esas condiciones.
   Teniendo que

   $$\gamma_1(t) = (\cos(t)+1, -\sin(t)), t \in \left[\frac{\pi}{2}, d\right],$$

   tal que

   $$\gamma_1'(t) = (-\sin(t), -\cos(t)).$$

Calculemos la integral de línea,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{d} (-\cos^2(t) - \cos(t))\, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{d} \left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) - \cos(t) \right) dt$$
$$= \frac{\pi - 2d}{4} - \frac{\sin(2d)}{4} - \sin(d) + 1.$$

3. Por otro lado, consideramos el segmento que va de $(1{,}8,\, 0{,}6)$ a $(1, -1)$:

$$\gamma_2(t) = (1{,}8 - 0{,}8t, 0{,}6 - 1{,}6t),\ t \in [0,1],$$

donde,

$$\gamma_2'(t) = (-0{,}8, -1{,}6).$$

Calculamos la integral de línea.

$$\int_0^1 (-2{,}88 + 1{,}28t)dt = -2{,}24.$$

Así, el área es $\int_\gamma \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} + \int_{\gamma_1} \vec{F}$.

Ejercicio 1.49 Calcula el área de la siguiente figura usando el Teorema de Green para agujeros. Una corona elíptica centrada en $(0,2)$, cuyo interior es

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 144 < (3x)^2 + 16(y-2)^2 < 288\},$$

y su elipse interior está cortada por la recta $y = 5 - 2x$ y el punto $(0,2)$. ■

Solución:
La corona está formada por dos elipses.
Elipse exterior:

$$\left(\frac{x}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Elipse interior:

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1.$$

Estaríamos ante el siguiente caso:

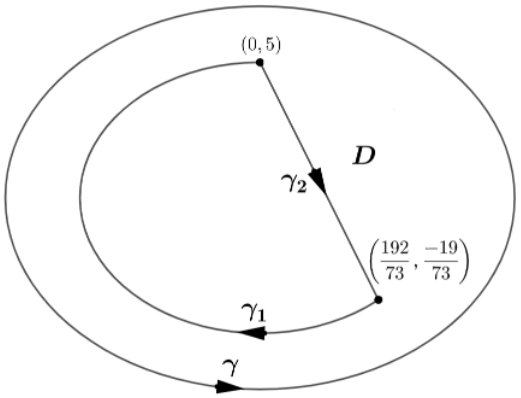

Figura 1.4.15: Ejercicio 1.49

Usando el Teorema de Green con agujeros podemos obtener el área, siempre que seleccionemos un $\vec{F}$ adecuado, tal que la resta entre sus derivadas parciales sea 1, por ejemplo $\vec{F}(x,y) = (0,x)$.

Considerando γ la curva que describe la elipse exterior, γ_1 la curva que describe la elipse interior y γ_2 la que describe la recta, orientadas de forma positiva respecto a nuestra figura D, tenemos que:

$$\int_\gamma \vec{F} + \int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \int\int_D 1\, d(x,y).$$

Así que necesitamos tener definidas las tres curvas.

1. La elipse exterior dada por

   $$\gamma(t) = (4\sqrt{2}\cos(t), 3\sqrt{2}\sin(t) + 2),\ t \in [0, 2\pi]$$

   cuya integral de línea sería

   $$\int_0^{2\pi} 24\cos^2(t)\, dt = 24\pi.$$

2. La elipse interior dada por

   $$\gamma_1^{-1}(t) = (4\cos(t), 3\sin(t) + 2),$$

   donde t iría entre los ángulos que representan los puntos de intersección de la recta con la elipse interior. Se calcularían sabiendo que la elipse interior está dada por $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 = 1$ y la recta sería $y = 5 - 2x$, igualando y y despejando, tenemos que los puntos de corte son $(0,5)$ y $\left(\frac{192}{73}, \frac{-19}{73}\right)$. Así, tendría que cumplirse que $0 = \cos(t)$, $1 = \sin(t)$, entonces $t = \frac{\pi}{2}$ y que $\frac{48}{73} = \cos(t)$, $\frac{-55}{73} = \sin(t)$, llamemos d a la t que cumple esas condiciones. Teniendo que

   $$\gamma_1^{-1}(t) = (4\cos(t), 3\sin(t) + 2)\ t \in \left[\frac{\pi}{2}, d\right],$$

   donde,

   $$(\gamma_1^{-1})'(t) = (-4\sin(t), 3\cos(t)).$$

   Calculemos la integral de línea.

   $$\int_{\gamma_1^{-1}} \vec{F} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{d} 12\cos^2(t)\, dt = 6d - 3\pi + 3\sin(2d).$$

3. Por otro lado, consideramos la recta que va de $(0,5)$ a $(\frac{192}{73}, \frac{-19}{73})$,

   $$\gamma_2(t) = (0,5) + \left(\frac{192}{73}, \frac{-384}{73}\right) t,\ t \in [0,1],$$

   tal que

   $$\gamma_2'(t) = \left(\frac{192}{73}, \frac{-384}{73}\right).$$

   Calculamos la integral de línea.

   $$\int_0^1 \frac{-384 \cdot 192}{73^2} t\, dt = \frac{-36864}{5329}.$$

Así, teniendo ahora en cuenta la orientación, el área será

$$\int_\gamma \vec{F} - \int_{\gamma_1^{-1}} \vec{F} + \int_{\gamma_2} \vec{F}.$$

Teorema de Green generalizado

Ejercicio 1.50 Usando el teorema de Green generalizado, demuestra que considerando el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, entonces $\int_\gamma \vec{F} = 2\pi$, siendo γ cualquier camino cerrado con el origen en su interior. ■

Solución:

Como el origen está en el interior de la región acotada por γ, podemos considerar $\gamma_1(t) = (a\cos(t), -a\sin(t))$, para $t \in [0, 2\pi]$, la circunferencia en sentido horario con centro el origen y radio a, con a suficientemente pequeño tal que se encuentre en el interior de la curva γ.

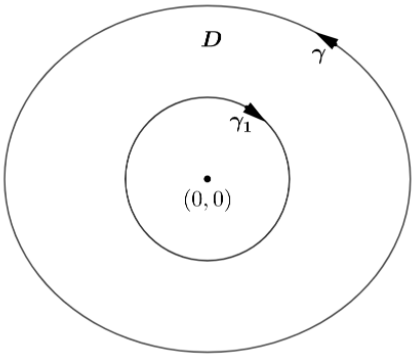

Figura 1.4.16: Ejercicio 1.50

Considerando como D el dominio acotado por la curvas γ y γ_1, tendremos, por el Teorema de Green generalizado, que

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} + \int_\gamma \vec{F} = \int_{\partial^+ D} \vec{F} = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) d(x,y).$$

Por un lado, si calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Por tanto,

$$\int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) d(x,y) = 0.$$

Así pues, $\int_\gamma \vec{F} = -\int_{\gamma_1} \vec{F} = 2\pi$. Ya que,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(t)}{a}, \frac{\cos(t)}{a}\right)(-a\sin(t), -a\cos(t))dt = -2\pi.$$